

Comparación experimental de filtro de Kalman y filtro complementario para la estimación de actitud

G. Perez Paina D. Gaydou J. Redolfi C. Paz L. Canali
Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería, C.I.I.I.
Universidad Tecnológica Nacional, Regional Córdoba

18 de julio de 2011

Resumen

Se realiza un análisis comparativo de la estimación del ángulo de inclinación o actitud de una plataforma móvil, mediante fusión sensorial por medio del filtro de Kalman y complementario, a partir de mediciones de sensores inerciales tipo acelerómetro y giróscopo. El filtro de Kalman permite estimar la actitud de forma óptima siempre y cuando los ruidos que afectan al sistema cumplan requisitos bien establecidos y puedan ser modelados de forma precisa; mientras que el filtro complementario no necesita la descripción del ruido que afecta las mediciones. Se plantean el modelo de los sensores utilizados que permite describir el comportamiento de los mismos y los ruidos que afectan a las mediciones. Se estudia el comportamiento de ambos filtros mediante simulaciones para determinar como afectan los parámetros del diseño de cada filtro al resultado final de la estimación; también se realiza una comparación de ambos filtros mediante simulaciones. Finalmente se presentan los resultados con datos reales obtenidos a partir de experimentos, tanto para determinar los parámetros de ajuste de cada filtro, como para realizar un análisis comparativo del comportamiento de ambos filtros en diferentes condiciones de funcionamiento de la plataforma de experimentación.

Índice

1. Introducción	3
2. Filtro de Kalman	4
2.1. Ecuaciones del filtro	4
2.2. Definición de ruido blanco	4
2.3. Modelo de medición	5
2.4. Modelo para la estimación de ángulo	5
3. Filtro Complementario	6
3.1. Aplicación a mediciones de acelerómetro y giróscopo	7
3.2. Discretización de los filtros	8
3.3. Implementación	9
4. Resultados de simulación	10
4.1. Parámetros de la simulación	10
4.2. Filtro de Kalman	10
4.3. Filtro complementario	11
4.4. Comparación entre filtro de Kalman y complementario	11
5. Resultados experimentales	12
5.1. Plataforma experimental	12
5.2. IMU 3DM-GX1	12
5.3. Medición de los ruidos de los sensores	13
5.3.1. Medición de σ_θ	15
5.3.2. Medición de σ_ω	15
5.3.3. Cálculo de Q y R	17
5.4. Comparación entre filtro de Kalman y complementario	19
5.4.1. En el dominio del tiempo	19
6. Conclusiones	20
A. IMU Casera	22
A.1. Características	22
A.2. Resultados	22

1. Introducción

En aplicaciones de navegación en robótica móvil o de sistema de estabilidad o control se necesita poder medir la actitud de la plataforma móvil utilizada, para lo cual se emplean diferentes sensores de uso común. Una de las tecnologías de sensores ampliamente utilizada en la actualidad son los sensores tipo MEMS (Microelectromechanical System) por su relativo bajo costo, tamaño reducido y relativas buenas prestaciones. Las mediciones obtenidas con estos sensores incluyen ruido debido a diferentes causas, ya sean eléctricas o por vibraciones inherentes del sistema móvil. Como consecuencia se necesita emplear alguna técnica de estimación o de fusión sensorial, que permita obtener la magnitud de interés en base a dichas mediciones ruidosas.

En el presente trabajo se presenta la comparación experimental de la estimación del ángulo de inclinación o “actitud”, a ser aplicado al control de un robot volador (UAV, Unmanned Aerial Vehicle) tipo cuatrirrotor utilizando dos técnicas distintas de fusión sensorial. Por un lado se estudia el comportamiento del filtro de Kalman, ampliamente utilizado para la estimación de estado. Por otro lado se estudia el filtro complementario que se utiliza generalmente en aplicaciones de navegación usando sensores inerciales para combinar información de diferentes sensores. Esto permite poder evaluar las ventajas y desventajas de cada filtro de forma objetiva, en cuanto al comportamiento de la señal estimada como de la implementación del filtro. En la fig. 1 se muestra de forma esquemática la utilización de sensores de tipo acelerómetro y giróscopo para la estimación del ángulo, a partir de los filtros analizados.

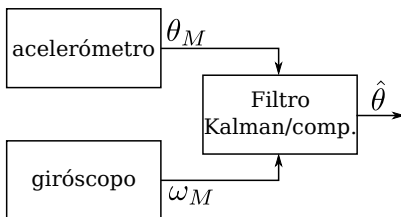


Figura 1: Estimación de actitud a partir de mediciones de acelerómetro y giróscopo

En [1] se presenta el diseño de un sistema de estimación de actitud de bajo costo y bajo peso, para ser usado en la estabilización de un helicóptero autónomo. El trabajo está basado en la fusión de las mediciones realizadas con un giróscopo y un inclinómetro a través de un filtro complementario. Los resultados obtenidos son comparados con el valor de orientación obtenido con un potenciómetro. Otro sistema de actitud en una dimensión utiliza un filtro de Kalman a partir de mediciones de un acelerómetro y un giróscopo de bajo costo, se presenta en [2]; el modelo de los sensores utilizado es bastante simple, pero igualmente los resultados experimentales obtenidos son buenos.

Un trabajo realizado recientemente [3], presenta la implementación de un filtro complementario en un sistema embebido para la estimación de actitud utilizando sensores inerciales, a ser aplicado en la estabilización de una plataforma móvil voladora. Primeramente, se realizan los ensayos necesarios de cada sensor, acelerómetro y giróscopo, para obtener las características de ruido y espectro de cada medición, para diferentes casos de funcionamiento de la plataforma; la aplicación del filtro complementario, en dichas señales permitieron obtener una estimación de la actitud satisfactoria para estabilizar la plataforma.

En [4] se hace una revisión del filtrado complementario y se muestra su relación con el filtrado de Kalman y el de Wiener. En el caso del filtro complementario no se necesita una descripción estadística de los ruidos que afectan a las señales y el análisis se hace en el dominio de la frecuencia. En cambio el filtro de Kalman se diseña en el dominio del tiempo, sin prestarle mucha atención a la función de transferencia en el dominio de la frecuencia, característica principal en el filtrado de Wiener.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 y 3 se realiza el diseño del filtro de Kalman y complementario, respectivamente. Los resultados de las simulaciones aparecen en la sección 4 y en 5 se muestran los resultados experimentales obtenidos. En 6 aparecen las conclusiones correspondientes a los resultados teóricos y prácticos obtenidos. Al final (A) hay un anexo en donde se muestran los resultados obtenidos con una IMU diseñada anteriormente, usada actualmente para la estabilización de un robot volador de tipo cuatrirrotor.

2. Filtro de Kalman

El filtro de Kalman permite calcular la estimación óptima del estado de un sistema dinámico a partir de mediciones con ruido. Esta estimación se realiza de tal manera que se minimiza el error cuadrático medio.

El filtro de Kalman opera de forma iterativa en base a dos etapas: *predicción* y *corrección* dadas las ecuaciones estocásticas que describen la dinámica del sistema en variables de estado.

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k + w_k \quad (1)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2)$$

donde x es el vector de estado del sistema, F es la matriz de transición de estado, G es la matriz de ganancia de las señales de control y u es la entrada; z es el vector de mediciones, H relaciona el estado actual con la medición, w es el ruido del proceso y v el ruido de medición.

Las matrices de covarianza para w_k y v_k son

$$\mathbb{E}[w_k w_j^T] = \delta_{kj} Q_{kj} \quad (3)$$

$$\mathbb{E}[v_k v_j^T] = \delta_{kj} R_{kj} \quad (4)$$

$$\mathbb{E}[w_k v_j^T] = 0 \quad (5)$$

2.1. Ecuaciones del filtro

Las ecuaciones para la etapa de predicción del filtro son

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^- &= F\hat{x}_k + Gu_k \\ P_{k+1}^- &= FP_k F^T + Q \end{aligned} \quad (6)$$

y para la etapa de corrección o medición

$$\begin{aligned} K_k &= P_{k+1}^- H^T (HP_{k+1}^- H^T + R)^{-1} \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1}^- + K_k(z_k - H\hat{x}_{k+1}^-) \\ P_{k+1} &= (I - K_k H)P_{k+1}^- \end{aligned} \quad (7)$$

Para un funcionamiento óptimo del filtro es necesario que las fuentes de ruido sean procesos aleatorios Gaussianos independientes con media cero y que la dinámica del sistema sea lineal.

2.2. Definición de ruido blanco

Una secuencia blanca (white sequence) se define como una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con media cero. Esto significa que todos los miembros de la secuencia tienen media cero y que no están mutuamente correlacionados con los otros miembros de la secuencia. Si la distribución de las variables aleatorias también es normal, la secuencia es una secuencia Gaussiana blanca (Gaussian white sequence)[5, p. 94].

2.3. Modelo de medición

Uno de los requerimientos para diseñar un filtro de Kalman es el conocimiento del modelo dinámico del sistema, en nuestro caso el modelo de medición de los sensores.

Los sensores inerciales MEMS tienen gran aplicación en sistemas de navegación y de control debido a su bajo costo, teniendo como principal desventaja errores significativos en las mediciones. Por esto se hace necesario un adecuado desarrollo del modelo de los errores y el uso de filtrado para obtener una exactitud suficiente en la medición. Estos errores se pueden dividir en dos tipos fundamentales, determinísticos y estocásticos. La parte determinística incluye bias constantes, factores de escala, desalineamientos, no ortogonalidades en los ejes y otras; esta parte puede ser eliminada a través de técnicas de calibración. Pero la parte estocástica, contiene errores aleatorios (ruidos), los cuales no pueden ser removidos de las mediciones y deben ser modelados como procesos estocásticos. [6].

El modelo para el sistema dinámico giróscopo-acelerómetro más usado en la bibliografía y el utilizado en el presente trabajo se presenta en [7]. Este modelo supone que la medición del giróscopo está afectada por una deriva constante o bias ω_b y por un ruido blanco Gaussiano con media cero n_ω , ec. (8). Además la derivada del bias es un ruido blanco con medio cero y distribución Gaussiana n_α , ec. (9).

$$\dot{\theta} = \omega_M - \omega_b - n_\omega \quad (8)$$

$$\dot{\omega}_b = n_\alpha \quad (9)$$

La medición realizada con el acelerómetro tiene la siguiente forma

$$\theta_M = \theta_T + n_\theta \quad (10)$$

en donde n_θ es un ruido blanco con media cero y distribución Gaussiana. En 2.2 aparece una definición de ruido blanco.

En resumen, el modelo de medición del acelerómetro se muestra en la ec. (11) y el del giróscopo en las ec. (12), (13) y (14)

$$\theta_M = \theta_T + n_\theta, \quad n_\theta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\theta) \quad (11)$$

$$\omega_M = \omega_T + \omega_I, \quad (12)$$

$$\omega_I = \omega_b + n_\omega, \quad n_\omega \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\omega) \quad (13)$$

$$\dot{\omega}_b = n_\alpha, \quad n_\alpha \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\alpha) \quad (14)$$

En las ecuaciones anteriores y en las siguientes, el subíndice M indica medido y el subíndice T representa verdadero o real.

2.4. Modelo para la estimación de ángulo

El primer paso para la obtención de las ecuaciones del filtro de Kalman, es expresar el modelo en variables de estado, como en las ec. (1) y (2).

Las ecuaciones del filtro de Kalman se plantean para estimar el ángulo θ , y el bias del giróscopo ω_b . Suponiendo como entrada de “excitación” la medición del giróscopo y como medición de “corrección” la señal del acelerómetro

$$\begin{aligned} x &= [\theta \ \omega_b]^T \\ u &= \omega_M \\ z &= \theta_M \end{aligned} \quad (15)$$

Las ecuaciones para el modelo utilizado son

$$\begin{bmatrix} \theta_{k+1} \\ \omega_{b,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ \omega_{b,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dt \\ 0 \end{bmatrix} \omega_{M,k} + dt \begin{bmatrix} n_{\omega,k} \\ n_{\alpha,k} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\theta_{M,k} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_k \\ \omega_{b,k} \end{bmatrix} + n_{\theta,k} \quad (17)$$

donde $\omega_{M,k}$ y $\theta_{M,k}$ son las mediciones del gir6scopo y del aceler6metro a tiempo k , respectivamente. En estas ecuaciones el supra6ndice T indica transpuesta. El ruido del proceso es

$$w_k = dt \begin{bmatrix} n_{\omega,k} \\ n_{\alpha,k} \end{bmatrix}, \quad Q = \mathbb{E}[w_k w_k^T] \quad (18)$$

donde

$$Q = dt^2 \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} n_{\omega} \\ n_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{\omega} & n_{\alpha} \end{bmatrix} \right] = dt^2 \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} n_{\omega}^2 & n_{\omega} n_{\alpha} \\ n_{\omega} n_{\alpha} & n_{\alpha}^2 \end{bmatrix} \right] = dt^2 \begin{bmatrix} \sigma_{\omega}^2 & \sigma_{\omega\alpha} \\ \sigma_{\omega\alpha} & \sigma_{\alpha}^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

y el ruido de medici6n

$$v_k = n_{\theta,k}, \quad R = \mathbb{E}[v_k v_k^T] = \sigma_{\theta}^2 \quad (20)$$

el filtro de Kalman supone que el ruido del proceso y el de medici6n no est1n correlacionados.

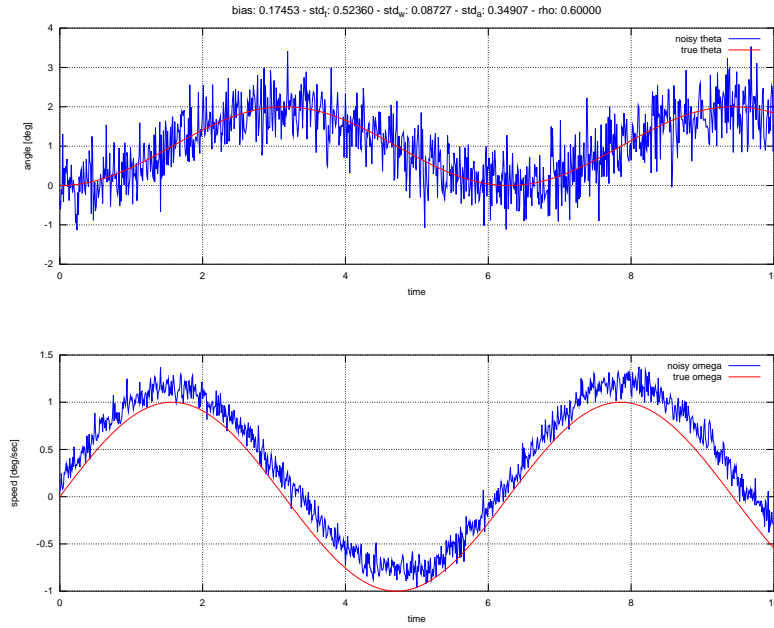


Figura 2: Se1ales de simulaci6n del aceler6metro y gir6scopo con ruido

En la fig. 2 se observan las gr1ficas de las se1ales generadas para las simulaciones, tanto para la medici6n del aceler6metro como del gir6scopo; con $\omega_b = 0,17453$, $\sigma_{\omega} = 0,087266$, $\sigma_{\alpha} = 0,34907$, $\sigma_{\theta} = 0,5236$ y $\rho_{\omega\alpha} = 0,6$.

Dado el modelo para la estimaci6n de 1ngulo cuyas variables se definen en la ec. (15). El filtro de Kalman realiza la estimaci6n de

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\omega}_b \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta}^2 & \rho_{\theta\omega} \sigma_{\theta} \sigma_{\omega} \\ \rho_{\theta\omega} \sigma_{\theta} \sigma_{\omega} & \sigma_{\omega}^2 \end{bmatrix}, \quad \rho_{\theta\omega} = \frac{\sigma_{\theta\omega}}{\sigma_{\theta} \sigma_{\omega}} \quad (21)$$

3. Filtro Complementario

Dada una medici6n con ruido $z(t) = s(t) + n(t)$ de una se1al $s(t)$, se puede recuperar la se1al $s(t)$ a partir de $z(t)$ de forma 6ptima aplicando el filtro de Wiener; donde la soluci6n 6ptima es en el sentido que se minimiza el error cuadr1tico medio entre la se1al recuperada y el valor real. Una de las principales asunciones del filtro de Wiener es que la se1al $s(t)$ es un proceso aleatorio estacionario con densidad espectral de potencia conocida [8].

Considerando el caso en que se tienen dos mediciones independientes de la misma señal

$$z_1(t) = s(t) + n_1(t) \quad (22)$$

$$z_2(t) = s(t) + n_2(t) \quad (23)$$

si la señal $s(t)$ se puede modelar como un proceso aleatorio con característica espectral conocida, entonces se puede utilizar el filtro de Wiener para recuperar de forma óptima la señal a partir de las mediciones con ruido $z_1(t)$ y $z_2(t)$. Si, por el contrario, no se puede modelar la señal $s(t)$ como un proceso aleatorio con característica espectral conocida se puede aplicar, en cambio, el filtrado complementario.

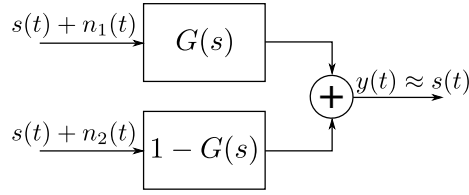


Figura 3: Filtro complementario

Según el esquema de la fig. 3 la señal pasa sin distorsión por el filtro independientemente de $G(s)$ y lo único que se modifica es el ruido, por lo tanto $G(s)$ se debe diseñar de forma de suprimir la mayor cantidad de ruido posible.

3.1. Aplicación a mediciones de acelerómetro y giróscopo

En la fig. 4 se muestra el diagrama en bloques completo en tiempo continuo del filtro complementario, en este esquema también se incluyen las funciones de transferencia de ambos sensores

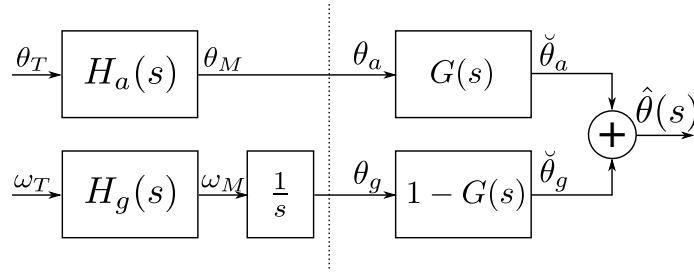


Figura 4: Filtro complementario aplicado a mediciones de acelerómetro y giróscopo

donde θ_a es el ángulo medido por el acelerómetro cuya señal esta corrompida por ruidos de alta frecuencia proveniente de las vibraciones, θ_g es el ángulo medido por el giróscopo, afectado por la deriva debida al bias y $\hat{\theta}$ es el ángulo estimado. θ_g se calcula como la integral de la velocidad angular medida, ω_M .

Las funciones de transferencia del filtro deben ser elegidas según

$$H_a(s)G(s) + H_g(s)(1 - G(s)) = 1 \quad (24)$$

en donde $H_a(s)$ y $H_g(s)$ representan las funciones de transferencia del acelerómetro y el giróscopo respectivamente. Esta elección permite que en caso que la señal de entrada no sea

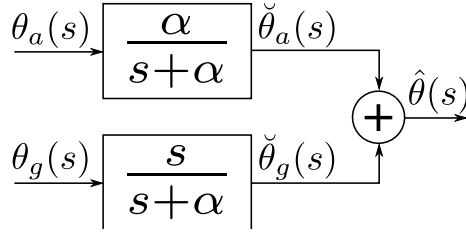


Figura 5: Diagrama del filtro complementario

afectada por ruido la señal de entrada será la misma que la señal de salida. Esto último evita que se produzca pérdida de información, distorsión, retrasos de fase, etc.

Suponiendo que las funciones de transferencia de los sensores son iguales a 1, queda $H_a(s) = H_g(s) = 1$. Después de esta simplificación el modelo del filtro es el que aparece en la fig. 5.

La función de transferencia elegida para $G(s)$ es un filtro pasa bajos de primer orden, lo cual hace que la estimación en baja frecuencia dependa de la medición del acelerómetro y que se eliminen los ruidos en alta frecuencia que afectan al acelerómetro.

$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad (25)$$

Y la función de transferencia para $1 - G(s)$:

$$1 - G(s) = \frac{s}{s + \alpha} \quad (26)$$

este filtro nos permite hacer que las componentes de alta frecuencia de la medición estimada estén dominadas por el aporte de las mediciones provenientes del giróscopo.

En la fig. 5 se observa que si ambas mediciones son ideales (libres de ruido), la función de transferencia total del filtro resulta

$$\frac{\hat{\theta}(s)}{\theta(s)} = G(s) + (1 - G(s)) = 1 \quad (27)$$

por lo que

$$\hat{\theta}(s) = \theta(s) \quad (28)$$

3.2. Discretización de los filtros

Para la implementación de los filtros digitales se discretizan las funciones de transferencia de los mismos usando la transformada \mathcal{Z} , suponiendo un retenedor de orden cero a la entrada. Con esto se obtiene una expresión compacta para el filtro completo.

Si se define $G_1(s) = G(s)$ y $G_2(s) = 1 - G(s)$, se tiene

$$G_1(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{(1 - e^{-Ts})}{s} \frac{\alpha}{s + \alpha} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{\alpha}{s(s + \alpha)} \right\} \quad (29)$$

$$G_1(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\tau}})z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}} \quad (30)$$

$$G_2(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{(1 - e^{-Ts})}{s} \frac{s}{s + \alpha} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s + \alpha} \right\} \quad (31)$$

$$G_2(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}} \quad (32)$$

En donde $\alpha = \frac{1}{\tau}$ y τ representa la constante de ambos filtros, y $\tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{2\pi f_c}$; donde f_c representa la frecuencia de corte del filtro.

El diagrama en bloques del filtro discretizado se puede ver en la fig. 6.

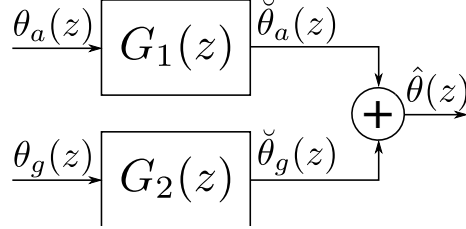


Figura 6: Diagrama del filtro complementario en dominio \mathcal{Z}

3.3. Implementación

Para la implementación es necesario representar las funciones de transferencia como ecuaciones en diferencias. Como se ve en la fig. 6, el ángulo estimado $\hat{\theta}$ nos queda

$$\hat{\theta}(z) = \check{\theta}_a(z) + \check{\theta}_g(z) \quad (33)$$

$$\check{\theta}_a(z) = G_1(z)\theta_a(z) \quad (34)$$

$$\check{\theta}_a(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\tau}})z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}}\theta_a(z) \quad (35)$$

La ecuación en diferencias queda

$$\check{\theta}_{a,k} = e^{-\frac{T}{\tau}}\check{\theta}_{a,k-1} + (1 - e^{-\frac{T}{\tau}})\theta_{a,k} \quad (36)$$

$$\check{\theta}_g(z) = G_2(z)\theta_g(z) \quad (37)$$

$$\check{\theta}_g(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}}\theta_g(z) \quad (38)$$

La última ecuación en diferencias es

$$\check{\theta}_{g,k} = e^{-\frac{T}{\tau}}\check{\theta}_{g,k-1} + \theta_{g,k} - \theta_{g,k-1} \quad (39)$$

$$\omega_k T = \theta_{g,k} - \theta_{g,k-1} \quad (40)$$

$$\check{\theta}_{g,k} = e^{-\frac{T}{\tau}}\check{\theta}_{g,k-1} + \omega_k T \quad (41)$$

Sumando ambas ecuaciones en diferencias (ec. (36) y ec. (41)), nos queda:

$$\hat{\theta}_k = e^{-\frac{T}{\tau}}\hat{\theta}_{a,k-1} + (1 - e^{-\frac{T}{\tau}})\theta_{a,k} + e^{-\frac{T}{\tau}}\hat{\theta}_{g,k-1} + \omega_k T \quad (42)$$

$$\hat{\theta}_k = e^{-\frac{T}{\tau}}(\hat{\theta}_{a,k-1} + \hat{\theta}_{g,k-1}) + (1 - e^{-\frac{T}{\tau}})\theta_{a,k} + \omega_k T \quad (43)$$

$$\hat{\theta}_k = e^{-\frac{T}{\tau}} \hat{\theta}_{k-1} + (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \theta_{a,k} + \omega_k T \quad (44)$$

La ecuación recursiva final del filtro complementario diseñado corresponde a la ec. (44). Como vemos es una ecuación sencilla y fácil de implementar en un sistema embebido; lo que lo hace muy atractivo, además de su buen funcionamiento [3].

4. Resultados de simulación

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones realizadas sobre ambos filtros. Las simulaciones fueron realizadas con el software GNU/Octave. Se muestran primero por separado los resultados de las estimaciones realizadas con ambos filtros, también se muestran los valores de los errores de estimación para cada filtro. Y luego la comparación de ambos filtros.

4.1. Parámetros de la simulación

Los parámetros usados en las simulaciones son los siguientes:

Listing 1: Parámetros de los filtros usados para la simulación teórica

```

1 dt = 0.010000      ; [ s ]
2 nsteps = 1000
3 speed_bias = 10    ; [ deg/s ]
4 std_angle = 13     ; [ deg ]
5 std_speed = 40     ; [ deg/s ]
6 R = 0.051480
7 Q = 0.00005  0.00000
8           0.00000  0.48739
9 fc = 0.50000    ; [ Hz ]
10 tau = 0.31831   ; [ s ]

```

En donde dt representa el intervalo de muestro, R y Q son las matrices de covarianza de la medición y del proceso respectivamente; fc es la frecuencia de corte del filtro complementario.

Para la simulación se generaron señales ruidosas con distribución normal y media cero, con los valores de desviación estándar que aparecen en el listado 1 (`std.`). Además a la señal medida por el giróscopo se le agregó un bias en la medición (`speed_bias`).

En la figura 7 se ven las señales de entradas usadas en la simulación de ambos filtros comparadas con las señales no ruidosas. En el gráfico de la velocidad angular se puede ver un pequeño corrimiento hacia arriba de la señal ruidosa con respecto a la señal verdadera, esto se debe al bias positivo introducido intencionalmente.

4.2. Filtro de Kalman

Las fig. 8 y 9 muestran los resultados de la estimación mediante el filtro de Kalman para dos casos, con diferente estado inicial. La fig. 8(a) y 9(a) se observa la señal con ruido del ángulo, la señal verdadera y la estimación. Y en la fig. 8(b) y 9(b) se observa la señal verdadera y con ruido de la velocidad angular y la estimación del bias.

En las dos simulaciones el estado inicial de la estimación del ángulo $x_1 = \theta$ es igual a la primer medida del ángulo obtenida con el acelerómetro, pero en el primer caso la estimación de $x_2 = \omega_b = 0$ y en el segundo caso $x_2 = \omega_b = \omega_{M,1}$ (igual a la primer medición del giróscopo). Se puede observar como influye un valor muy alejado en la estimación inicial del bias, tanto a la estimación de esta como a la del ángulo.

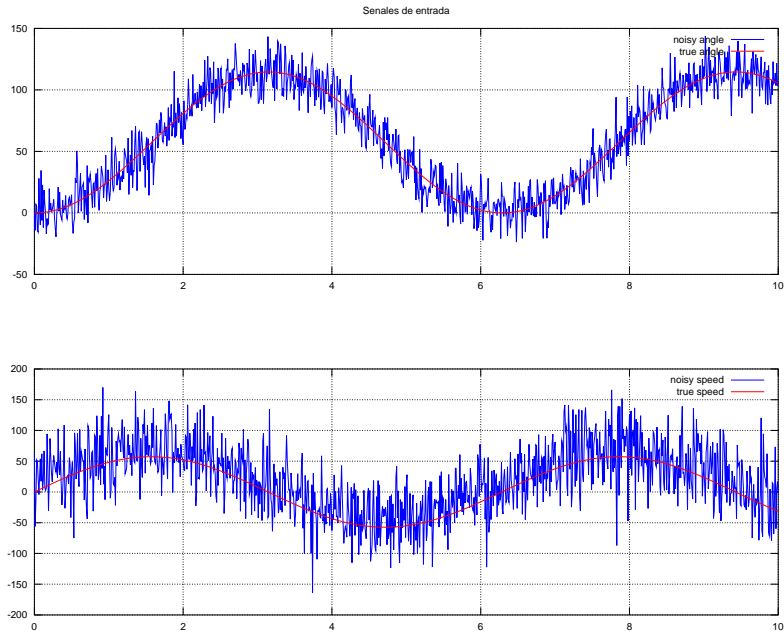


Figura 7: Señales de entrada ruidosas usadas para la simulación

4.3. Filtro complementario

La fig. 10 muestra las gráficas del resultado en la estimación de ángulo mediante el filtro complementario para diferentes valores de frecuencia de corte f_c . La fig. 10(a) muestra la comparación entre el valor estimado y el verdadero; y la fig. 10(b) muestra el valor medio y la desviación estándar del error de estimación.

Como se observa la media de la estimación disminuye a medida que aumenta el valor de f_c , pero la varianza crece, o sea, que se obtiene una estimación con menor sesgo a costa de mayor varianza (o variación) en la estimación. Esto coincide con las gráficas temporales, en donde vemos que a menor frecuencia de corte, la estimación es menos ruidosa, pero se encuentra más alejada del valor real. También se puede observar en la fig. 10(b) un mínimo en el valor de la varianza.

4.4. Comparación entre filtro de Kalman y complementario

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones en el dominio del tiempo. En la fig. 11 se puede ver la comparación entre la estimación del filtro de Kalman y la estimación realizada con el filtro complementario para distintas frecuencias de corte de este último.

En el listado 2 podemos ver la media y la varianza del error estimado por ambos filtros.

Listing 2: Valor medio y Varianza del error de estimación

```

1 mean_kalman = -0.28950
2 var_kalman = 0.54749
3 mean_comp = 2.2548
4 var_comp = 0.12696

```

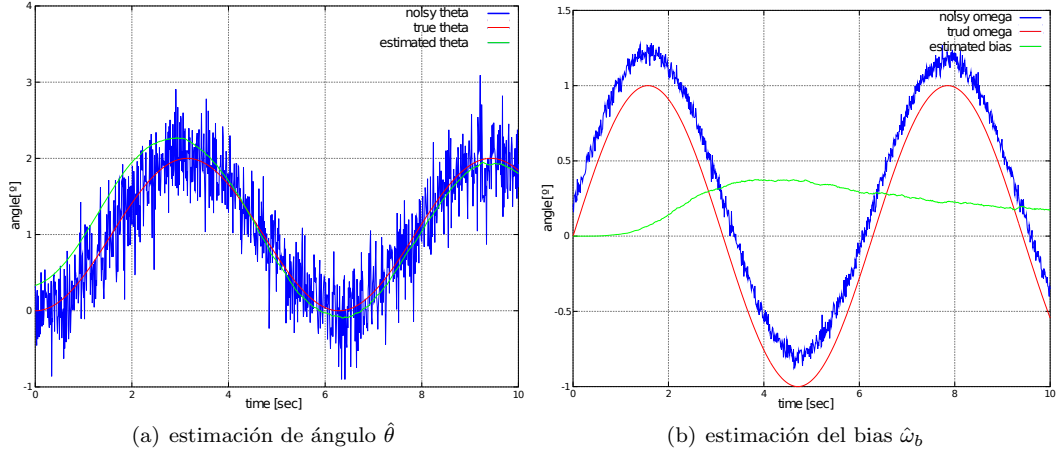


Figura 8: Estimación mediante el filtro de Kalman con $x_0 = [\theta_{M,1} \ 0]^T$

5. Resultados experimentales

La comparación experimental entre el filtro de Kalman y el filtro complementario se realiza utilizando una plataforma construida en el *Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería*, la cual consta de un balancín [3] que puede moverse con un grado de libertad angular. Esta se explica en la sección 5.1. El sensor utilizado es una Unidad de Medición Inercial (IMU, Inertial Measurement Unit) comercial, modelo 3DM-GD1 de la firma Microstrain. Su funcionamiento se explica en la sección 5.2.

5.1. Plataforma experimental

La plataforma experimental consiste en una base con forma de T invertida y en la parte superior de la misma un tubo de aluminio que puede pivotar sobre su centro permitiendo recorrer un ángulo de $\pm 40^\circ$. La unión entre las partes rotantes esta realizada con un eje que gira sobre rodamientos, para mantener al mínimo el rozamiento. Sobre la misma estructura se encuentra montado un potenciómetro lineal de bajo ruido, acoplado a la parte móvil, esto permite que el movimiento del tubo giratorio genere un movimiento proporcional en el potenciómetro. Sobre el tubo se encuentran montados el conjunto motor-hélice, y la IMU en la parte central. Dicha plataforma resulta de gran utilidad al momento de realizar experimentos de fusión de sensores, análisis de vibraciones y para realizar pruebas de algoritmos de control.

En la fig. 12 se observa la plataforma experimental utilizada. En la imagen se aprecian el conjunto motor-hélice, la batería de alimentación, el potenciómetro, la IMU, el controlador embebido y la estructura mecánica.

5.2. IMU 3DM-GX1

La IMU 3DM-GX1 es un sensor de orientación construido en base a 3 sensores. Estos sensores son un giróscopo, un acelerómetro y un magnetómetro, de 3 ejes. Las aplicaciones de este tipo de sensores son la navegación de vehículos aéreos no tripulados, la robótica, etc. La frecuencia máxima de transmisión es de 350 Hz y la comunicación es por puerto RS232. También posee un microcontrolador interno el cual implementa un algoritmo de filtrado y fusión. Esta última funcionalidad no se utiliza en el presente trabajo, debido a que se necesitan los valores de las mediciones crudas de los sensores para luego sobre estos aplicar los algoritmos de filtrado a analizar.

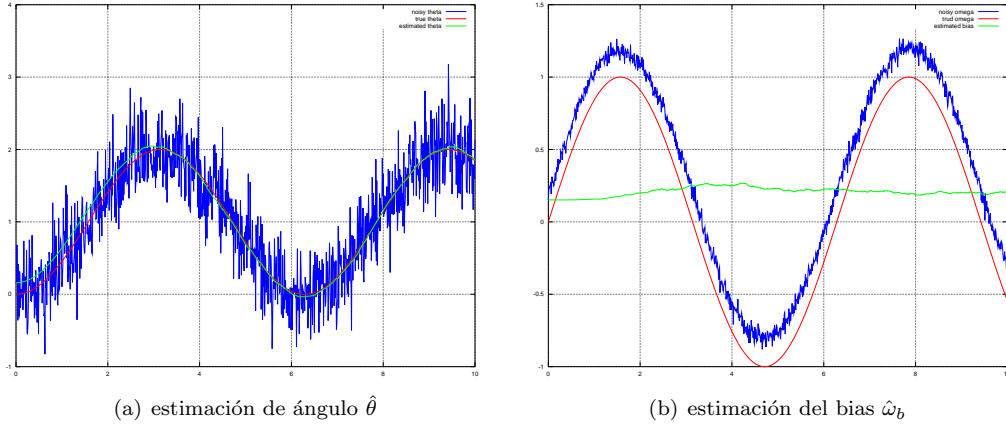


Figura 9: Estimación mediante el filtro de Kalman con $x_0 = [\theta_{M,1} \ \omega_{M,1}]^T$

5.3. Medición de los ruidos de los sensores

Para la aplicación del filtro de Kalman (ec. (6) y (7)) se necesita conocer los valores de las matrices de covarianza R y Q que modelan los ruidos. Además estos deben tener media cero y distribución normal para obtener un resultado óptimo. En cambio para el filtro complementario es necesario que uno de los sensores tenga mayor ruido en alta frecuencia y el otro en baja frecuencia [4]. Para realizar el cálculo de las matrices de covarianza se debe conocer σ_θ , σ_ω y σ_α , que aparecen en los modelos de los sensores desarrollado anteriormente, dados en las ec. (11), (12), (13) y (14). Aunque los valores de las matrices de covarianza de los ruidos resultan de gran importancia para obtener un buen comportamiento del filtro, la mayoría de la bibliografía no menciona como obtener estas matrices. En algunos trabajos estos valores se fijan por procesos de ajuste o calibración hasta obtener los mejores resultados de estimación. En otros trabajos se utilizan los valores brindados por los fabricantes [2]. En [9] se obtiene un modelo para las matrices Q y R , y se prueba el filtro con los valores calculados, pero debido

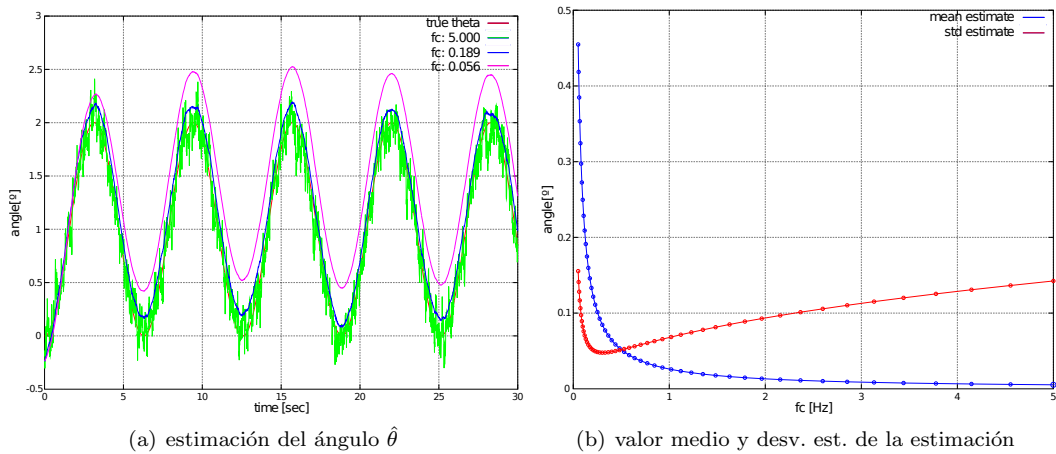


Figura 10: Estimación mediante filtro complementario para diferentes valores de f_c

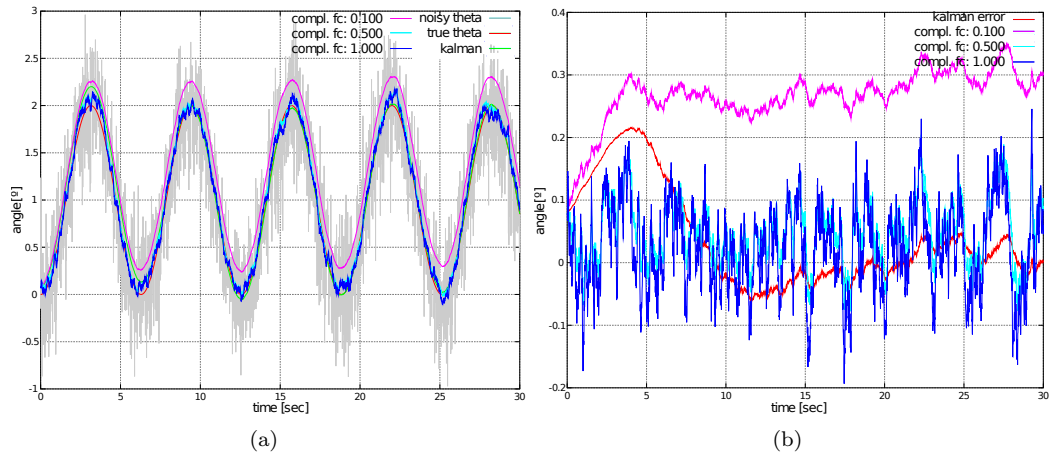


Figura 11: Comparación entre filtro de Kalman y complementario para diferentes valores de f_c

a errores y simplificación en el modelado realizado, se obtiene una divergencia en el filtro, por lo tanto se realiza un proceso de ajuste con el que se obtienen buenos resultados. La solución propuesta en el presente trabajo es obtener los valores de σ_θ y σ_ω mediante experimentos. Luego para calcular el valor restante σ_α se utilizará un proceso de ajuste hasta obtener el valor que permita una mejor estimación.

El cuadro 1 muestra los valores de varianza y desviación estándar obtenidos para la medición del ángulo realizada con el acelerómetro, y en el cuadro 2 los mismos valores para la medición de la velocidad angular realizada con el giróscopo. En el cuadro 3 se muestran los valores medios de las mediciones realizadas con el giróscopo.

A continuación se explican los experimentos para obtener estos valores. Todas las mediciones se realizan con la plataforma en reposo.

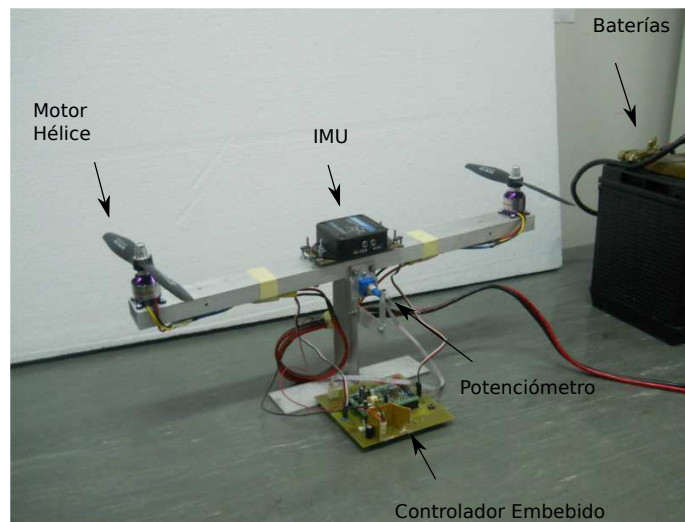


Figura 12: Plataforma experimental

	Varianza (σ_θ^2)	Desviación estándar (σ_θ)
Motores apagados 1	0.044910	0.211920
Motores apagados 2	0.055817	0.236256
Motores encendidos 25 %	398.62	19.97
Motores encendidos 35 %	294.44	17.16

Cuadro 1: Varianza y desviación estándar para la medición del ángulo con el acelerómetro. σ_θ^2 y σ_θ .

	Varianza (σ_ω^2)	Desviación estándar (σ_ω)
Motores apagados 1	0.15453	0.39310
Motores apagados 2	0.17116	0.41371
Motores encendidos 25 %	8.7452	2.9572
Motores encendidos 35 %	2.9230	1.7097

Cuadro 2: Varianza y desviación estándar para la medición de la velocidad angular realizada con el giróscopo. σ_ω^2 y σ_ω .

5.3.1. Medición de σ_θ

El parámetro σ_θ corresponde a la desviación estándar del ruido aleatorio de la medición del ángulo obtenida a través del acelerómetro. Para realizar esta medición se utiliza el montaje explicado en 5.1 realizando varios experimentos con distintas condiciones de trabajo de los motores. Estas condiciones de trabajo son, mediciones con los motores apagados y con los motores encendidos con las hélices a distintas velocidades.

En la fig. 13(a) podemos ver la medición del ángulo de la plataforma con los motores apagados y en la fig. 13(b) podemos ver la misma medición en un intervalo de tiempo 10 veces mayor. Como se observa, el valor de la varianza es pequeño.

La fig. 14 muestra la medición con los motores encendidos para una potencia del 25 % y del 35 % de la potencia máxima disponible en los motores. Como se observa la varianza para este caso es mucho más grande que cuando los motores están apagados. Esto se debe a la vibración introducida por los motores y las hélices sobre la estructura.

5.3.2. Medición de σ_ω

El segundo experimento permite calcular el valor del parámetro σ_ω , el cual corresponde a la desviación estándar del ruido aleatorio de la medición de velocidad angular realizada con el giróscopo. Para hacer esta medición se utiliza el mismo montaje y se realizan experimentos similares.

La fig. 15(a) muestra la medición de la velocidad angular de la plataforma con los motores apagados y en la fig. 15(b) la misma medición durante un intervalo de tiempo más extenso. Como se observa el valor de la varianza es pequeño, igual que para el caso de la medición del

	Media ($E[\sigma_\omega]$)
Motores apagados 1	-0.16754
Motores apagados 2	-0.20058
Motores encendidos 25 %	-0.20849
Motores encendidos 35 %	-0.17060

Cuadro 3: Valor medio de la medición de la velocidad angular realizada con el giróscopo, en reposo.

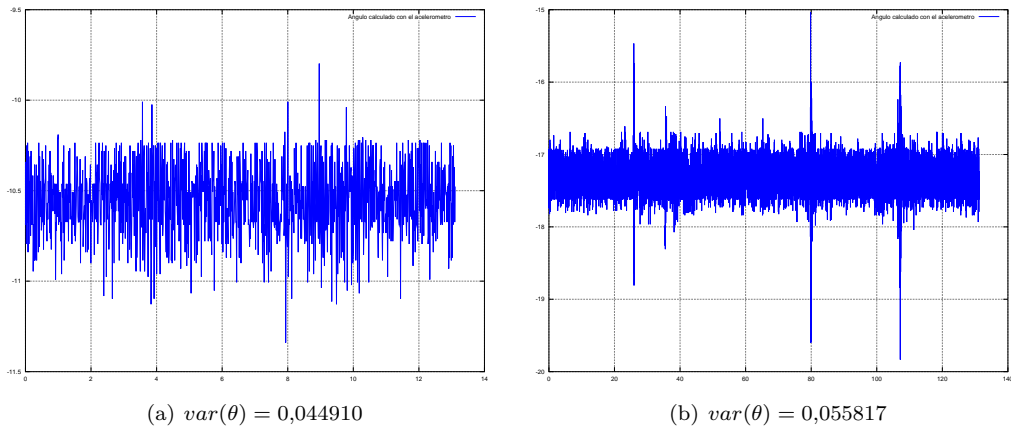


Figura 13: Medición del ángulo con los motores apagados para dos intervalos tiempo

ángulo.

La fig. 16 muestra la medición con los motores encendidos para una potencia del 25% y del 35% de la potencia máxima disponible en los motores. Como se observa la varianza para este caso es mayor que cuando los motores están apagados. Esto se debe a la vibración introducida por los motores sobre la estructura. Este aumento con respecto a la medición realizada con los motores apagados no es tan grande como en el caso de la medición del ángulo realizada con el acelerómetro. Esto nos da una primera aproximación de los valores esperados de las matrices de covarianza, indicando que el valor de R es mucho más grande que los valores de las componentes de Q .

En los gráficos de la velocidad angular (fig. 16) se muestra también el valor medio, $mean$. Como los experimentos se realizaron con la estructura en reposo la velocidad angular media real es cero, pero como se puede observar la media de las mediciones tiene un valor distinto de

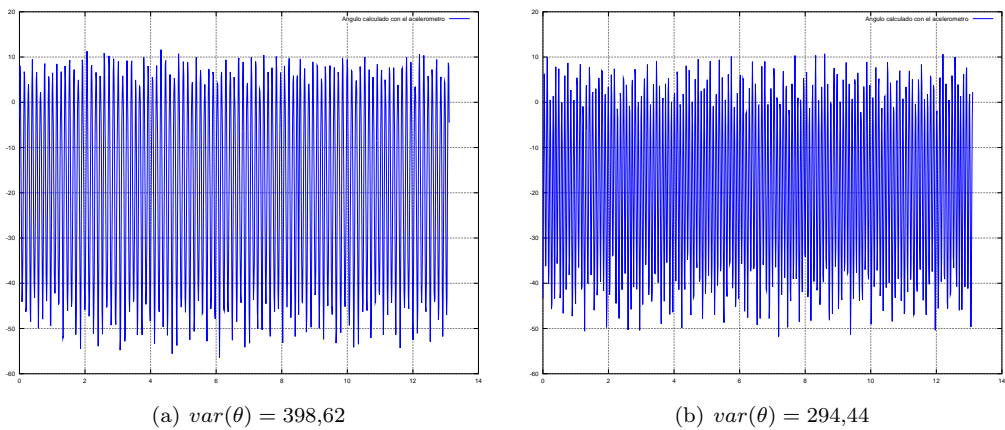
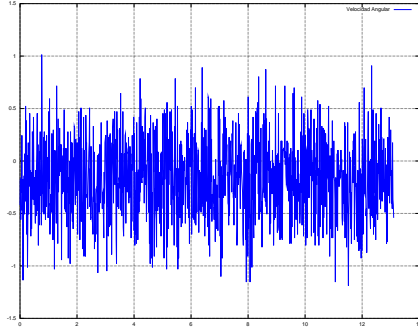
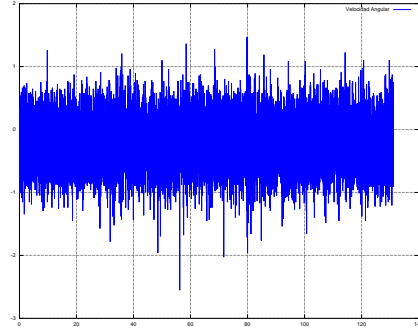


Figura 14: Medición del ángulo con los motores encendidos con una potencia de 25% y 35% respectivamente



(a) $var(\omega) = 0,15453$, $mean(\omega) = -0,16754$



(b) $var(\omega) = 0,17116$, $mean(\omega) = -0,20058$

Figura 15: Medición de velocidad angular con los motores apagados para dos intervalos de tiempo

ceros, por esto al calcular el ángulo de inclinación de la estructura mediante la integración de la velocidad angular, se obtiene un valor que crece indefinidamente (divergencia) con el tiempo [3].

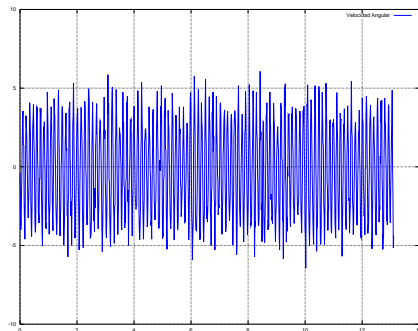
5.3.3. Cálculo de Q y R

Según la ec. (20) y (19), los valores de Q y R son

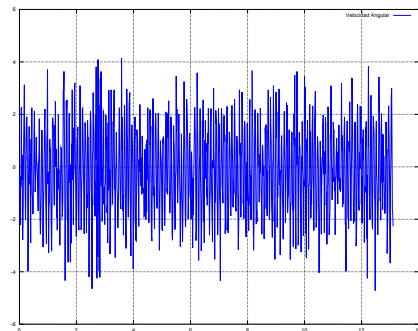
$$Q = dt^2 \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 & \sigma_{\omega\alpha} \\ \sigma_{\omega\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$R = \sigma_\theta^2 \quad (46)$$

La matriz de covarianza del ruido del proceso Q depende de las varianzas del ruido de los sensores y del tiempo de muestreo (dt). En los experimentos realizados el tiempo de muestreo



(a) $var(\omega) = 0,17116$, $mean(\omega) = -0,20058$



(b) $var(\omega) = 0,17116$, $mean(\omega) = -0,20058$

Figura 16: Medición de velocidad angular con los motores encendidos con una potencia de 25 % y 35 % respectivamente

Medias	Kalman	Comp	Kalman(2.624s-13.12s)	Comp(2.624s-13.12s)	Kalman(11.808s-13.12s)	Comp(11.808s-13.12s)
Apagados 1	-0.23056	-0.054629	-0.25342	-0.057252	-0.26645	-0.24512
Apagados 2	0.054093	-0.038318	-0.18387	-0.11476	-0.96256	0.12851

Cuadro 4: Valor medio del error de estimación correspondiente a la fig. 17.

Varianzas	Kalman	Comp	Kalman(2.624s-13.12s)	Comp(2.624s-13.12s)	Kalman(11.808s-13.12s)	Comp(11.808s-13.12s)
Apagados 1	0.14918	0.12676	0.15315	0.13792	0.055041	0.058253
Apagados 2	1.9467	2.5709	1.7717	2.5179	3.4080	4.9683

Cuadro 5: Varianza del error de la estimación realizada correspondiente a la fig. 17.

es de $0,01312s$. La varianza σ_ω^2 se obtiene del cuadro 2 y suponiendo que ambos ruidos no están correlacionados, la matriz de covarianza Q queda diagonal. Sólo nos falta calcular σ_α^2 ; como se mencionó anteriormente este valor es difícil obtener a partir de mediciones, por lo tanto se comienza utilizando un valor menor que el de σ_ω^2 y luego se analizan los resultados obtenidos, en caso de obtener mucho un de estimación no satisfactorio, se realiza un barrido de este parámetro y se determina el valor que permita obtener una mejor estimación.

De esta forma Q queda

$$Q = dt^2 \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 & \sigma_{\omega\alpha} \\ \sigma_{\omega\alpha} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = 0,01312^2 \begin{bmatrix} 2,9572^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,505e^{-3} & 0 \\ 0 & 1,721^{-4} \end{bmatrix} \quad (47)$$

El cálculo de la matriz de covarianza de medición R es más sencillo de obtener dado que en este sistema es un escalar, se utiliza por lo tanto el valor mayor obtenido en las mediciones (cuadro 1).

$$R = \sigma_\theta^2 = 19,97^2 = 398,62 \quad (48)$$

En los cálculos de ambas matrices de covarianzas se usaron los mayores valores obtenidos de las mediciones.

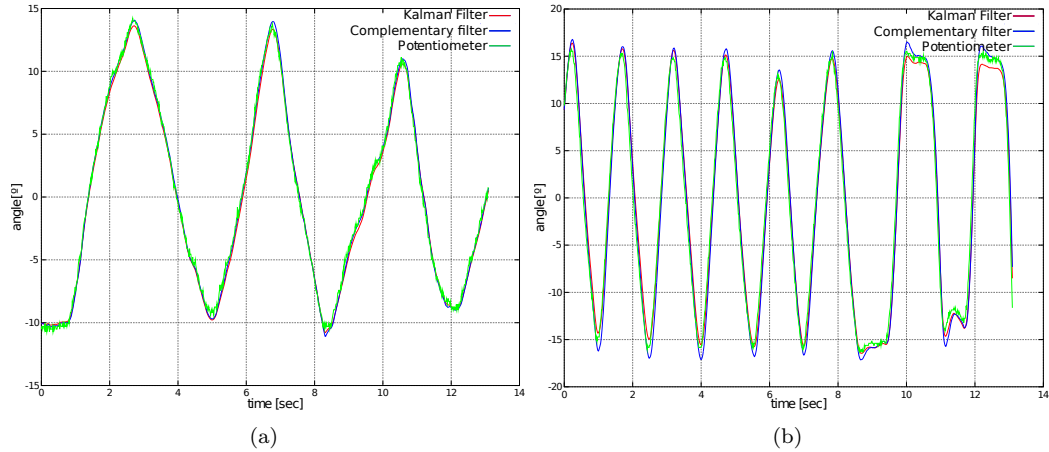


Figura 17: Comparación experimental entre el filtro de Kalman y el complementario con los motores apagados.

Medias	Kalman	Comp	Kalman(2.624s-13.12s)	Comp(2.624s-13.12s)	Kalman(11.808s-13.12s)	Comp(11.808s-13.12s)
Sin Hélices	-1.4514	-0.16209	-0.78047	-0.025618	0.12567	-0.36607
Con Hélices	-0.62505	-0.078555	-0.45991	-0.10194	0.039079	-0.10850

Cuadro 6: Valor medio del error de estimación correspondiente a la fig. 18.

Varianzas	Kalman	Comp	Kalman(2.624s-13.12s)	Comp(2.624s-13.12s)	Kalman(11.808s-13.12s)	Comp(11.808s-13.12s)
Sin Hélices	4.7444	2.3164	3.5753	2.4566	1.5385	2.6658
Con Hélices	0.89490	2.7027	0.88882	2.7756	0.19615	1.6931

Cuadro 7: Varianza del error de la estimación correspondiente a la fig. 18.

5.4. Comparación entre filtro de Kalman y complementario

En esta sección se muestran los resultados de la estimación obtenidos utilizando ambos filtros. Como señal de comparación o señal verdadera se utiliza la señal angular medida con el potenciómetro.

5.4.1. En el dominio del tiempo

La fig. 17 muestra los resultados de la estimación de ambos filtros para dos experimentos realizados con los motores apagados. En los cuadros 4 y 5 se pueden ver los valores medios y las varianzas del error de estimación correspondientes a la fig. 17. Las primeras 2 columnas indican los valores de la estimación para el tiempo total y las 4 últimas corresponden a los valores para dos intervalos finales distintos. Esto se hace así para eliminar los errores que se producen en la iniciación de ambos filtros.

La fig. 18 muestra las estimaciones realizadas con la plataforma experimental con los motores encendidos. En la fig. 18(a) se puede ver la misma con los motores encendidos pero sin hélices, en 18(b) se puede ver la estimación con las hélices. Como se observa, un mal balanceo del conjunto motor-hélices hace que los niveles de ruido sean mayores, fig. 18(b). Este nivel de ruido mayor hace que la estimación también tenga mayor ruidosidad, siendo menor en el filtro de Kalman. En los cuadros 6 y 7 se muestran las medias y varianzas de los errores de estimación correspondientes a las gráficas de las fig. 18.

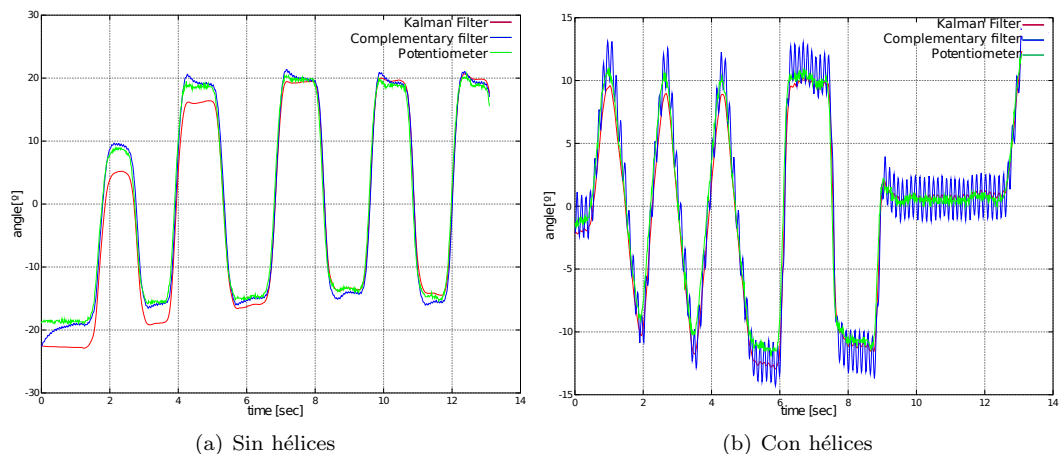


Figura 18: Comparación experimental entre el filtro de Kalman y el complementario con los motores encendidos

Medias	Kalman	Comp	Kalman(2.624s-13.12s)	Comp(2.624s-13.12s)	Kalman(11.808s-13.12s)	Comp(11.808s-13.12s)
Encendidos	-1.3121	-0.18437	-1.9946	0.16979	2.8942	0.41383
Apagados	-0.36973	-0.048090	-0.31514	-0.0013849	0.10760	0.41689

Cuadro 8: Valor medio del error de estimación correspondiente a la fig. 18.

Varianzas	Kalman	Comp	Kalman(2.624s-13.12s)	Comp(2.624s-13.12s)	Kalman(11.808s-13.12s)	Comp(11.808s-13.12s)
Sin Hélices	23.011	6.9274	30.783	7.7415	1.8721	6.4675
Con Hélices	2.9715	5.2734	3.2293	5.5742	5.4287	9.1845

Cuadro 9: Varianza del error de la estimación realizada correspondiente a la fig. 18.

En la fig. 19, y en los cuadros 8 y 9 se muestran los resultados de otros experimentos realizados.

La fig. 20 muestra los resultados obtenidos con el filtro complementario para distintos valores de f_c . Como se puede ver en la fig. 20(b), el gráfico del valor medio y la varianza del error de estimación tiene la misma forma que el gráfico de la simulación que aparece en la fig. 11(b). En la fig. 20(a) se observa como el error de estimación en estado estacionario aumenta en el filtro complementario a medida que disminuye la frecuencia de corte. Esto se puede explicar aplicando el teorema del valor final a la función de transferencia de la parte inferior del diagrama en bloques que vemos en la fig. 4, suponiendo que la señal del giróscopo (w_T en la fig.) 4 es un escalón. Esta señal escalón corresponde al bias de la medición del giróscopo.

6. Conclusiones

Se realizó un análisis comparativo entre el filtro de Kalman y el filtro complementario para la estimación del ángulo de inclinación o actitud de una plataforma móvil, a partir de mediciones de sensores inerciales, tanto acelerómetros como giróscopo. Por un lado, el filtro de Kalman fusiona información de forma óptima siempre y cuando los ruidos de las mediciones sean blanco, Gaussiano y de media cero, y se conozca el parámetro que modela dicho ruido (la matriz de covarianza). Por otro lado, el filtro complementario fusiona información tomando las

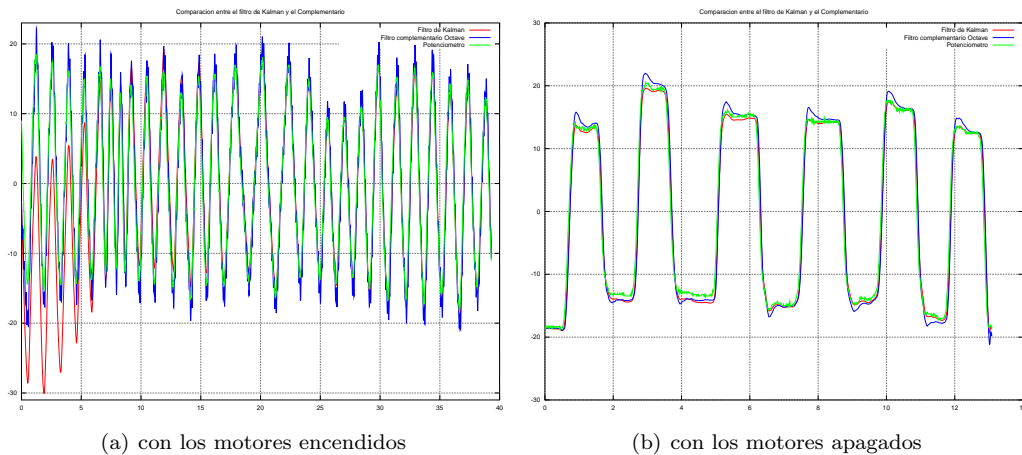


Figura 19: Otros resultados obtenidos de la comparación experimental entre el filtro de Kalman y el complementario

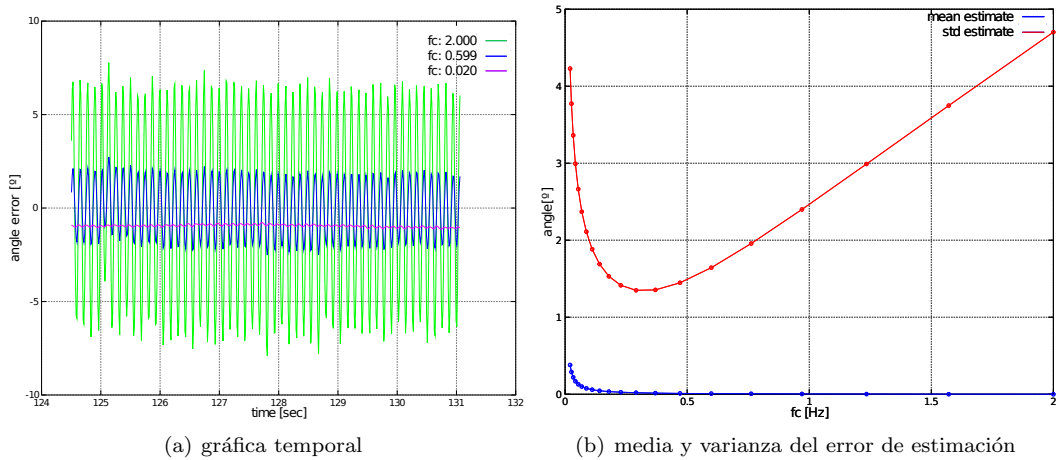


Figura 20: Resultados obtenidos al barrer f_c en el filtro complementario

mediciones de sensores con diferentes características espectrales, incorporando información de un sensor en baja frecuencia y de otro en alta frecuencia.

En relación a la etapa de diseño de ambos filtros, el diseño del filtro complementario de primer orden resulta más simple comparado con el diseño del filtro de Kalman. Esta simplicidad hace al filtro complementario más adecuado para ser implementado en un sistema embebido, como por ejemplo en un microcontrolador. En cambio, la implementación del filtro de Kalman requiere del cálculo matricial, incluyendo suma, producto e inversión de matrices.

Una de las ventajas del filtro complementario es que no se necesita conocer el modelo de los sensores ni de la distribución de los ruidos que lo afectan. En cambio, para implementar un filtro de Kalman se hace necesario conocer el modelo dinámico de los sensores y el comportamiento estadístico de los ruidos que afectan a las mediciones realizadas por los mismos. En este trabajo se planteó una metodología para obtener los parámetros que describen los ruidos, con la que se obtuvieron resultados satisfactorios. En caso de no poder medir dichos ruidos fácilmente, el filtro complementario de primer orden al requerir un único parámetro de ajuste hace más simple su su calibración para un funcionamiento óptimo. Un procedimiento similar con el filtro de Kalman, para el sistema analizado requiere ajustar 5 parámetros a la vez.

Una de las principales desventajas del filtro de Kalman, es que el ruido debe ser del tipo blanco Gaussiano con media cero. Para la aplicación de interés en donde una de las principales fuentes de ruido es la vibración generada por el desbalanceo del conjunto motor-hélice, la cual tiene componentes espectrales fijas, hace que la realidad difiera mucho del modelo de ruido ideal supuesto por Kalman para obtener una estimación óptima. A pesar de esto los resultados obtenidos con el filtro de Kalman son satisfactorios.

En el aspecto cuantitativo de la comparación se pudo comprobar en los experimentos los resultados obtenidos mediante las simulaciones. Un aspecto que resulta importante es el hecho que para el caso del filtro complementario diseñado resulta difícil obtener una estimación con baja deriva y con bajo valor de error cuadrático medio de estimación. Como se puede apreciar a partir de la simulaciones (fig. 10(b)) y en los resultados de los experimentos (fig. 20(b)), a medida que baja la media del error de estimación aumenta su varianza. Esto plantea una situación de compromiso entre error medio de estimación y varianza de estimación. En caso de que dicho comportamiento no sea aceptable para alguna aplicación específica se puede plantear un filtro complementario de mayor orden, pero con esto se pierde el atractivo de simpleza y facilidad de implementación.

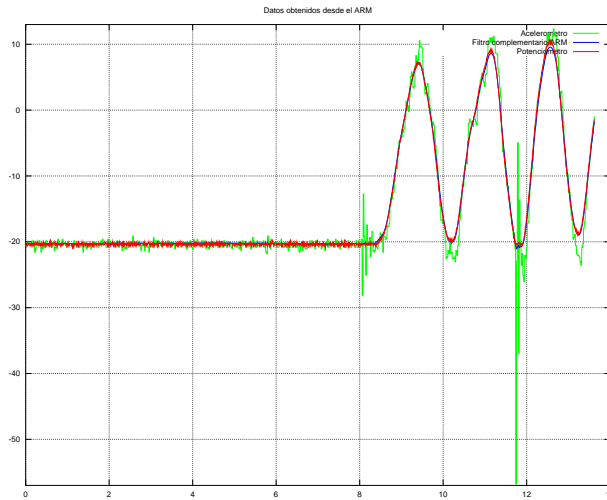


Figura 21: Señales de entrada obtenidas desde el ARM utilizadas para la simulación.

A. IMU Casera

En este anexo se muestran los resultados obtenidos con la IMU diseñada en el CIII.

A.1. Características

La IMU diseñada contiene los siguientes sensores:

- Giróscopo ITG3200
- Acelerómetro ADXL345
- Magnetómetro HMC5843

El control de la IMU es realizada con la placa de desarrollo de ARM7 a través del bus I2C y luego los datos obtenidos son enviados por wireless a la PC para su posterior procesamiento.

A.2. Resultados

En A.2 mostraremos los resultados de la fusión realizada con ambos filtros. Las señales de entrada corresponden a la velocidad angular medida con el giróscopo y el ángulo medido con el acelerómetro. Estas señales fueron obtenidas de vuelos realizados con el QA3 en distintas configuraciones. Ya sea con los motores apagados o con los mismos encendidos a distintas potencias.

Listing 3: Valor medio y Varianza del error de estimación de ambos filtros comparados contra el potenciómetro

```

1 mean_kalman = -0.21006
2 var_kalman = 0.37721
3 mean_comp = 0.089575
4 var_comp = 0.10544

```

La fig. 21 se muestran las señales obtenidas de una experiencia con los motores apagados y el acelerómetro configurado con el filtro interno con una frecuencia de corte de 25Hz. En ellas

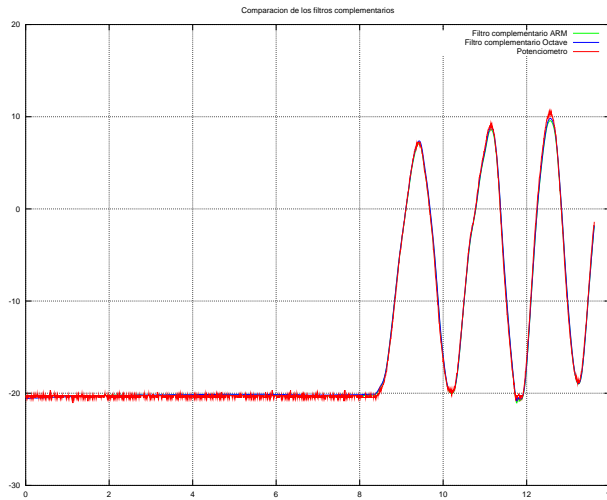


Figura 22: Comparación de los resultados obtenidos con el filtro complementario implementado en el ARM y el filtro implementado con los mismos datos en GNU/Octave.

podemos ver el ángulo obtenido con un potenciómetro, al que podemos llamar verdadero, el ángulo obtenido con el acelerómetro y el filtro complementario calculado con el ARM.

La fig. 22 se puede ver el filtro complementario calculado con el ARM y el que se calculo en la PC con octave para los mismos datos de entrada.

En la fig. 23 vemos los resultados obtenidos en GNU/Octave para los 2 filtros.

En el listado 3 se muestran las medias y los errores comparados contra el potenciómetro. Estos valores no son significativos debido a que la señal del potenciómetro es bastante ruidosa y también a que no tiene una buena calibración del cero.

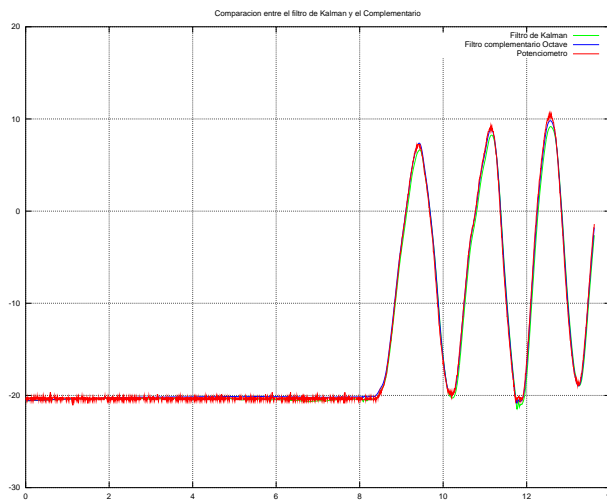


Figura 23: Comparación de los resultados obtenidos con ambos filtros.

Referencias

- [1] A.-J. Baerveldt and R. Klang. A low-cost and low-weight attitude estimation system for an autonomous helicopter. In *Intelligent Engineering Systems, 1997. INES '97. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, pages 391–395, sep 1997.
- [2] Young Soo Suh. Attitude estimation using low cost accelerometer and gyroscope. In *in AIAA 3rd Unmanned Unlimited Technical Conference, Workshop and Exhibit*, volume 2, pages 423–427, 2003.
- [3] D. Gaydou, J Redolfi, and A. Henze. Filtro complementario para estimación de actitud aplicado al controlador embebido de un cuatrirrotor. *CASE 2011, Congreso Argentino de Sistemas Embebidos*, 2011.
- [4] W.T. Higgins. A comparison of complementary and kalman filtering. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, AES-11(3):321–325, May 1975.
- [5] R.G. Brown and P. Hwang. *An Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, third edition, 1997.
- [6] Petko Petkov and Tsonyo Slavov. Stochastic modeling of mems inertial sensors. *Cybernetics and Information Technologies*, 10(2), 2010.
- [7] Farrenkopf R. L. Analytic steady-state accuracy solutions for two common spacecraft attitude estimators. *AIAA Mechanics and Control of Flight Conference*, 1(4):282–284, 1978.
- [8] Yaakov Bar-Shalom, Thiagalingam Kirubarajan, and X.-Rong Li. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 2002.
- [9] E. Foxlin. Inertial head-tracker sensor fusion by a complementary separate-bias kalman filter. page 185, 1996.