Modelo de cámaras y calibración de parámetros

Gonzalo Perez Paina

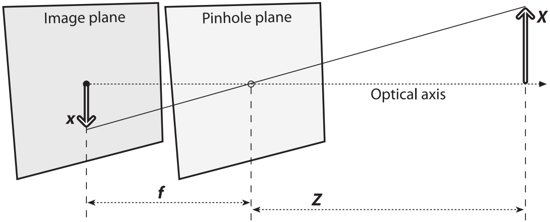
Elementos básicos para el procesamiento de imágenes digitales

Prof. Dr. Oscar Bustos

Noviembre 2009

Indice

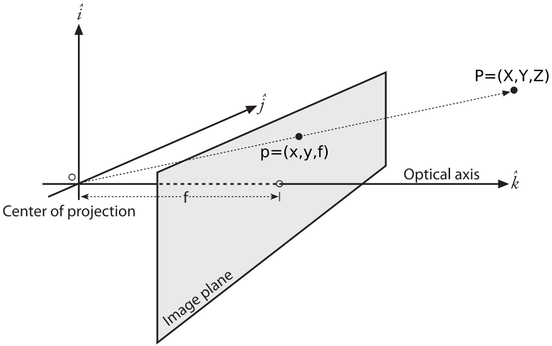
Modelo pinhole



El modelo mas simple de una cámara comprende una apertura pinhole y un plano imagen. Cualquier rayo de luz que se emite o reflecta por una superficie en la escena pasa a través de la apertura antes de alcanzar el plano imagen.

$$x = -f\frac{X}{Z}$$

Modelo pinhole



Un punto $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ se proyecta en el plano de la imagen por medio de un rayo que pasa por el centro de proyección, y resulta en un punto imagen $\mathbf{p} = (x, y, f)$

$$x = f\frac{X}{Z} \quad , \quad y = f\frac{Y}{Z} \quad , \quad z = f \tag{1}$$

Modelo pinhole

Para poder relacionar los puntos de la escena observada a puntos en el plano de la imagen, se consideran dos sistemas de coordenadas

1. sistema de coordenadas externo **w**, independiente de la ubicación de la cámara y sus parámetros
2. sistema de coordenadas de la cámara **c**

Ambos sistemas de coordenadas están relacionados por una traslación expresada por un vector $\mathbf{t}$ y una rotación representada por la matriz $\mathbf{R}$

Modelo pinhole

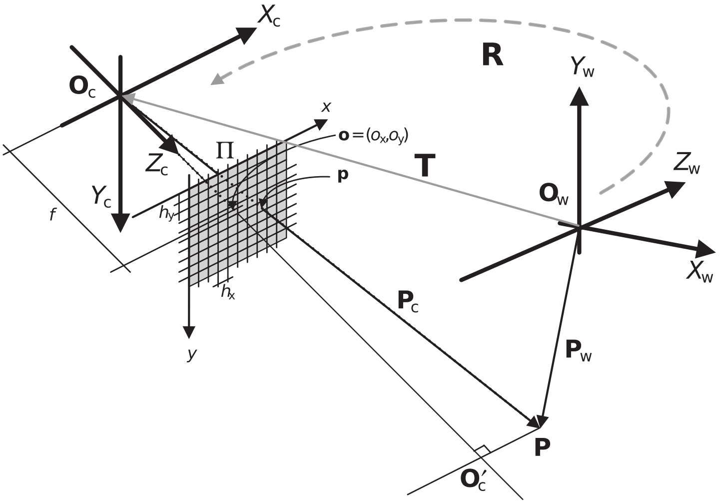


Figura: Modelo pinhole de una cámara perspectiva

Modelo pinhole

- el punto $\mathbf{O}_c$ se llama **punto focal o de proyección**, que junto con x_x, y_c y z_c determinan el sistema de coordenadas de la cámara
- π es el plano de la imagen
- línea que pasa por $\mathbf{O}_c$ y es perpendicular a π es el **eje óptico**
- intersección del eje óptico con el plano imagen determina el **punto principal** de coordenadas locales (o_x, o_y)
- la distancia entre el punto focal y el plano imagen se llama **distancia focal**
- los valores h_x y h_y determinan las dimensiones físicas del píxel

Modelo pinhole, parámetros

El modelo de cámara pinhole se define por medio de dos conjuntos de parámetros

parámetros extrínsecos

definen la localización y orientación del sistema de coordenadas de la cámara con respecto a un sistema de coordenadas conocido del mundo

parámetros intrínsecos

relaciona las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas de la cámara con coordenadas en píxeles

Parámetros extrínsecos

Un punto en el sistema de coordenadas del mundo $\mathbf{P_w}$ se expresa en el sistema de coordenadas de la cámara $\mathbf{P_c}$ mediante

$$\mathbf{P_c} = \mathbf{R}\left(\mathbf{P_w} - \mathbf{t}\right) \tag{2}$$

donde $\mathbf{R}$ es la matriz de rotación y $\mathbf{t}$ el vector de traslación que relacionan ambos sistemas de coordenadas, siendo

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{t} = \mathbf{O}_w - \mathbf{O}_c = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{R_i}$, $i = 1, 2, 3$ vector 3D formado con la i-ésima fila de $\mathbf{R}$

Parámetros intrínsecos

- parámetros de la transformación proyectiva, que para un modelo de cámara pinhole es la distancia focal f
- parámetros que mapean el sistema de coordenadas de la cámara en el sistema de coordenadas de la imagen. Si el origen de la imagen es $\mathbf{o} = (o_x, o_y)$ y las dimensiones físicas de los píxeles sobre el plano de la cámara son constantes y están dados por h_x y h_y

  La relación entre las coordenadas de la imagen (x_u, y_u) y las coordenadas de la cámara (x, y) son

  $$x = (x_u - o_x)h_x \quad , \quad y = (y_u - o_y)h_y$$

  donde el punto (x, y) esta relacionado al sistema de coordenada de la cámara, mientras que (x_u, y_u) y (o_x, o_y) a un sistema local del plano de la cámara

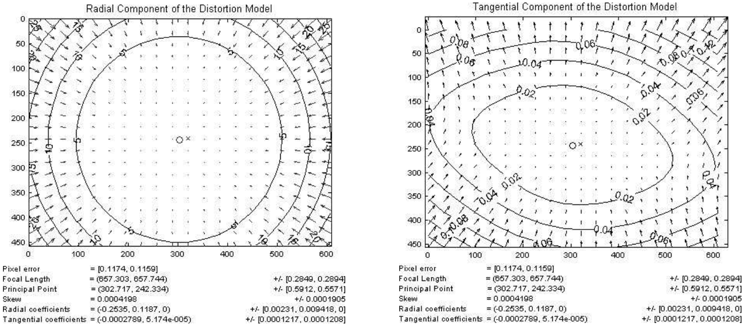
Parámetros intrínsecos

- Distorsiones geométricas que surgen de los parámetros físicos de los elementos ópticos de la cámara. Estas se pueden modelar como distorsión radial y distorsión tangencial

$$
\begin{aligned}
x_u &= x_v\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6\right) \quad , \quad y_u = y_v\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6\right) \\
x_u &= x_v + \left[2 p_1 y + p_2 (r^2 + 2x^2)\right] \quad , \quad y_u = y_v + \left[p_1 (r^2 + 2y^2) + 2 p_2 x\right]
\end{aligned}
$$

donde $r^2 = x_v^2 + y_v^2$.
Siendo k_1, k_2, k_3, p_1 y p_2 son nuevos parámetros intrínsecos de la cámara; y x_u e y_u son coordenadas ideales (sin distorsión) y x_v e y_v son coordenadas afectadas por la distorsión

Parámetros intrínsecos



(a) distorsión radial

(b) distorsión tangencial

Figura: Distorsiones debidas a los elementos ópticos de la cámara

Transformación de proyección perspectiva

De la ecuación (2)

$$\mathbf{P_c} = \mathbf{R}(\mathbf{P_w} - \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_w} - \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1(\mathbf{P_w} - \mathbf{t}) \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{P_w} - \mathbf{t}) \\ \mathbf{R}_3(\mathbf{P_w} - \mathbf{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix}$$

en (1)

$$\begin{aligned} x_c &= f\frac{\mathbf{R}_1(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})}{\mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})} \\ y_c &= f\frac{\mathbf{R}_2(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})}{\mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})} \\ z_c &= f \end{aligned}$$

donde $\mathbf{R}_i(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})$ es un valor escalar

Transformación de proyección perspectiva

en coordenadas locales del plano de la imagen

$$
\begin{aligned}
x_u &= \frac{f}{h_x}\frac{\mathbf{R}_1(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})}{\mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})} + o_x \\
y_u &= \frac{f}{h_y}\frac{\mathbf{R}_2(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})}{\mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})} + o_y
\end{aligned}
$$

Transformación de proyección perspectiva

Estas dos ecuaciones para (x_u, y_u) se pueden expresar en un conjunto de tres ecuaciones en coordenadas homogéneas (x_{uh}, y_{uh}, z_{uh})

$$\begin{aligned}
x_{uh} &= x_u \mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t}) = \frac{f}{h_x}\mathbf{R}_1(\mathbf{P}_w - \mathbf{t}) + o_{ux}\mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t}) \\
y_{uh} &= y_u \mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t}) = \frac{f}{h_y}\mathbf{R}_2(\mathbf{P}_w - \mathbf{t}) + o_{uy}\mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t}) \\
z_{uh} &= \mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})
\end{aligned}$$

Debido a esta transformación se evita la nolinealidad debida la división al costo de agregar una coordenadas. Luego

$$x_u = \frac{x_{uh}}{z_{uh}} \quad , \quad y_u = \frac{y_{uh}}{z_{uh}}$$

Transformación de proyección perspectiva

reescribiendo

$$\mathbf{p}_{uh} = \begin{pmatrix} x_{uh} \\ y_{uh} \\ z_{uh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f/h_x & 0 & o_x \\ 0 & f/h_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1(\mathbf{P}_w - \mathbf{t}) \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{P}_w - \mathbf{t}) \\ \mathbf{R}_3(\mathbf{P}_w - \mathbf{t}) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f/h_x & 0 & o_x \\ 0 & f/h_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{int}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & -\mathbf{R}_1\mathbf{t} \\ \mathbf{R}_2 & -\mathbf{R}_2\mathbf{t} \\ \mathbf{R}_3 & -\mathbf{R}_3\mathbf{t} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{ext}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{P}_w \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}_{wh}}$$

Transformación de proyección perspectiva

o bien

$$\mathbf{p}_{uh} = \mathbf{M}_{int}\mathbf{M}_{ext}\mathbf{P}_{wh}$$

donde la matriz de parámetros intrínsecos $\mathbf{M}_{int}$ y extrínsecos $\mathbf{M}_{ext}$ son

$$\mathbf{M}_{int} = \begin{pmatrix} f/h_x & 0 & o_x \\ 0 & f/h_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{M}_{ext} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & -\mathbf{R}_1\mathbf{t} \\ \mathbf{R}_2 & -\mathbf{R}_2\mathbf{t} \\ \mathbf{R}_3 & -\mathbf{R}_3\mathbf{t} \end{pmatrix}$$

Calibración de cámaras

La calibración de cámaras es necesaria en visión por computador 3D para poder extraer información métrica a partir de las imágenes 2D

Photogrammetric calibration

Se realiza mediante la observación de un objeto de calibración cuya geometría en el espacio 3D se conoce con muy buena precisión. El objeto de calibración generalmente consiste de dos o tres planos ortogonales entre sí

Self-calibration

En esta categoría no se utiliza un objeto de calibración. Solamente se mueve la cámara en una escena estática, y la rigidez de la escena provee dos restricciones en los parámetros internos de la cámara para un desplazamiento de la cámara usando solo información de la imagen. Aunque esta técnica es muy flexible, aún no esta madura puesto que hay muchos parámetros a estimar

Además, existen otras técnicas: puntos de fuga en direcciones ortogonales y calibración a partir de rotaciones puras

Método de Zhang [1]

Características

- orientado a sistemas de visión de escritorio (DVS)
- se necesita observar un patrón plano en varias (al menos dos) orientaciones diferentes moviendo ya sea la cámara o el patrón
- no se necesita conocer el movimiento
- método mas flexible que las técnicas clásicas, y mas robusto que la auto-calibración

[1] Z. Zhang. *A Flexible New Technique for Camera Calibration*, 1998

Método de Zhang

Para un patrón plano se elige el sistema de coordenadas del mundo, tal que $Z = 0$ para todos los puntos sobre el mismo. La formación de la imagen se puede describir en coordenadas homogéneas normalizada como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{int} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{array} \right] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{int} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t} \end{array} \right] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

donde los vectores $\mathbf{r}_i$ indican las columnas de la matriz de rotación $\mathbf{R}$

Método de Zhang, homografía

Si $\mathbf{P} = (X, Y)^T$ denota un punto sobre el patrón de calibración (con $Z = 0$). En coordenadas homogéneas normalizadas esta dado por $\tilde{\mathbf{P}} = (X, Y, 1)^T$.

De la ecuación (3) en ausencia de distorsión de la lente el punto en la imagen $\tilde{\mathbf{p}}$ y su correspondiente punto en la escena $\tilde{\mathbf{P}}$ están relacionados por la homografía $\mathbf{H}$

$$s\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{P}} \quad \text{con} \quad \mathbf{H} = \mathbf{M}_{int} \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t} \end{array} \right] \tag{4}$$

(La homografía $\mathbf{H}$ se estima con el método **maximum likelihood** asumiendo ruido Gausiano no correlacionado)

Método de Zhang, restricción de los parámetros intrínsecos

Si los vectores columnas de $\mathbf{H}$ se denotan por $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ y $\mathbf{h}_3$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{M}_{int} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t} \end{bmatrix} \tag{5}$$

donde λ es un factor de escala arbitrario. De la ecuación (5) se deduce que

$$\mathbf{r}_1 = (1/\lambda)\mathbf{M}_{int}^{-1}\mathbf{h}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = (1/\lambda)\mathbf{M}_{int}^{-1}\mathbf{h}_2$$

Por la ortogonalidad entre $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ tenemos que $\mathbf{r}_1^T\mathbf{r}_2 = 0$ y $\mathbf{r}_1^T\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2^T\mathbf{r}_2$, entonces [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1^T\mathbf{M}_{int}^{-T}\mathbf{M}_{int}^{-1}\mathbf{h}_2 &= 0 & (6)\\ \mathbf{h}_1^T\mathbf{M}_{int}^{-T}\mathbf{M}_{int}^{-1}\mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_2^T\mathbf{M}_{int}^{-T}\mathbf{M}_{int}^{-1}\mathbf{h}_2 & (7) \end{aligned}$$

lo que plantean **dos restricciones** en los parámetros intrínsecos de la cámara

[2] donde $A^{-T} = \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Método de Zhang, resolución

Para una solución cerrada de los parámetros intrínsecos y extrínsecos se define una matriz simétrica

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_{int}^{-T}\mathbf{M}_{int}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}$$

si

$$\mathbf{M}_{int} = \begin{pmatrix} f_x & 0 & o_x \\ 0 & f_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_x^2} & 0 & -\frac{o_x}{f_x^2} \\ 0 & \frac{1}{f_y^2} & -\frac{o_y}{f_y^2} \\ -\frac{o_x}{f_x^2} & -\frac{o_y}{f_y^2} & \frac{o_x}{f_x^2} + \frac{o_y}{f_y^2} + 1 \end{pmatrix}$$

donde $fx = f/hx$ y $fy = f/hy$

Método de Zhang, resolución

Utilizando la matriz $\mathbf{B}$ las restricciones de la ecuaciones (6) y (7) tienen la forma $\mathbf{h}_i^T\mathbf{B}\mathbf{h}_j$. La matriz $\mathbf{B}$ se puede expresar como un vector de 6 dimensiones $\mathbf{b} = (B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{13}, B_{23}, B_{33})$ y utilizando la notación $\mathbf{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, h_{i3})^T$ para los vectores columnas de la matriz de homografía $\mathbf{H}$ se obtiene

$$\mathbf{h}_i^T\mathbf{B}\mathbf{h}_j = \mathbf{v}_{ij}^T\mathbf{b}$$

donde el vector de 6 dimensiones $\mathbf{v}_{ij}$ es

$$\mathbf{v}_{ij} = (h_{i1}h_{j1}, h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1}, h_{i2}h_{j2}, h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3}, h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3}, h_{i3}h_{j3})^T$$

Método de Zhang, resolución

Por lo tanto, las ecuaciones de restricciones (6) y (7) dada una homografía $\mathbf{H}$ puede reescribirse como 2 ecuaciones homogéneas en $\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{12}^T \\ (\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{12})^T \end{pmatrix} \mathbf{b} = 0 \tag{8}$$

Si se observan n imágenes del plano de calibración, se puede agrupar n de las ecuaciones (8), teniendo

$$\mathbf{V}\mathbf{b} = 0$$

donde $\mathbf{V}$ es una matriz de $2n \times 6$. Si $n \geq 3$ se tiene una única solución $\mathbf{b}$ definida hasta un factor de escala

Método de Zhang, resolución

Los parámetros intrínsecos

$$
\begin{aligned}
f_x &= \sqrt{\nu / B_{11}} \\
f_y &= \sqrt{\nu B_{11} / (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)} \\
o_x &= -B_{13} f_x^2 / \nu \\
o_y &= (B_{12} B_{13} - B_{11} B_{23}) / (B_{11} B_{22} - B_{12}^2) \\
\text{donde} \quad \nu &= B_{33} - \left(B_{13}^2 + o_y (B_{12} B_{13} - B_{11} B_{23}) \right) / B_{11}
\end{aligned}
$$

Método de Zhang, resolución

y extrínsecos

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \lambda \mathbf{M}_{int}^{-1}\mathbf{h}_1 \\
\mathbf{r}_2 &= \lambda \mathbf{M}_{int}^{-1}\mathbf{h}_2 \\
\mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\
\mathbf{t} &= \lambda \mathbf{M}_{int}^{-1}\mathbf{h}_3
\end{aligned}$$

Luego los parámetros se optimizan minimizando el error de backprojection

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{p}_{ij} - \hat{\mathbf{p}}\left(\mathbf{M}_{int}, \mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i, P_j\right)\|^2$$

donde n: es la cantidad de imágenes, y m el número de puntos en cada imagen

Método de Zhang, estimación de la homografía

Si P_i y $\mathbf{p}_i$ son puntos en el modelo y la imagen respectivamente, idealmente deberían cumplir (4) pero en la práctica no se cumple debido al ruido en los puntos obtenidos de la imagen. Si se asume que $\mathbf{p}_i$ tiene ruido Gausiano con media $\mathbf{0}$ y matriz de covarianza $\mathbf{\Sigma}_{p_i}$, la estimación ML de $\mathbf{H}$ se obtiene minimizando el siguiente funcional

$$\sum_i \left(\mathbf{p}_i - \hat{\mathbf{p}}_i\right)^T \mathbf{\Sigma}_{p_i}^{-1} \left(\mathbf{p}_i - \hat{\mathbf{p}}_i\right)$$

donde

$$\hat{\mathbf{p}}_i = \frac{1}{\overline{h}_3^T P_i} \begin{bmatrix} \overline{h}_1^T P_i \\ \overline{h}_2^T P_i \end{bmatrix}$$

con $\overline{h}_i$ la i-ésima fila de $\mathbf{H}$. En la práctica se asume $\mathbf{\Sigma}_{p_i} = \sigma^2 \mathbf{I}$ para todo i, lo que se convierte en un problema de estimación nolineal de mínimos cuadrados, o sea $\min_{\mathbf{H}} \sum_i \|\mathbf{p}_i - \hat{\mathbf{p}}_i\|^2$.

Método de Zhang

Resumen

- a partir de un conjunto de puntos sobre el patrón plano de calibración y de la imagen se estima la homografía $\mathbf{H}$
- con $\mathbf{H}$ se tiene los vectores $\mathbf{v}_{ij}$
- de n imágenes se resuelve $\mathbf{V}\mathbf{b} = 0$
- con $\mathbf{b}$ se calculan los parámetros intrínsecos f_x, f_y, o_x y o_y
- de los parámetros intrínsecos y $\mathbf{H}$ se obtienen los parámetros extrínsecos $\mathbf{R}$ y $\mathbf{t}$
- optimizar los parámetros minimizando el error de backprojection

Método de Zhang, distorsión radial

Si (u, v) son las coordenadas en píxeles de la imagen ideal (sin distorsión, no observable) y $(\breve{u}, \breve{v})$ las coordenadas reales observadas correspondientes; siendo los puntos ideales la proyección de los puntos del patrón plano de acuerdo al modelo pinhole. De igual forma, (x, y) y $(\breve{x}, \breve{y})$ son las coordenadas normalizadas ideal y real, entonces

$$\begin{aligned}
\breve{x} &= x + x\left[k_1(x^2+y^2) + k_2(x^2+y^2)^2\right] \\
\breve{y} &= y + y\left[k_1(x^2+y^2) + k_2(x^2+y^2)^2\right]
\end{aligned}$$

donde k_1 y k_2 son los coeficientes de distorsión radial. En coordenadas en píxeles tenemos

$$\begin{aligned}
\breve{u} &= u + (u - u_0)\left[k_1(x^2+y^2) + k_2(x^2+y^2)^2\right] \\
\breve{v} &= v + (v - v_0)\left[k_1(x^2+y^2) + k_2(x^2+y^2)^2\right]
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} (u-u_0)(x^2+y^2) & (u-u_0)(x^2+y^2)^2 \\ (v-v_0)(x^2+y^2) & (v-v_0)(x^2+y^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \breve{u} - u \\ \breve{v} - v \end{bmatrix}$$

Método de Zhang, distorsión radial

Dados m puntos en n imágenes, se agrupan estas ecuaciones teniendo un total de $2mn$ ecuaciones o una matriz de la forma $\mathbf{Dk} = \mathbf{d}$, donde $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T$, la solución lineal en mínimos cuadrados

$$\mathbf{k} = \left(\mathbf{D}^T\mathbf{D}\right)^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{d}$$

Como la distorsión radial generalmente es pequeña se espera estimar los cinco parámetros intrínsecos descriptos anteriores $(\mathbf{M}_{int})$ razonablemente bien ignorando la distorsión. Una estrategia es estimar k_1 y k_2 después de haber estimados los otros parámetros.

Método de Zhang, distorsión radial

Una vez que se calculan k_1 y k_2 se puede refinar la estimación de los otros parámetros nuevamente utilizando $\breve{u}$ y $\breve{v}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\|\mathbf{p}_{ij}-\breve{\mathbf{p}}\left(\mathbf{M}_{int},k_1,k_2,\mathbf{R}_i,\mathbf{t}_i,P_j\right)\|^2$$

Se pueden alterar estos dos procedimientos hasta la convergencia

Ejemplo en OpenCV

- `cvFindChessboardCorners()`
- `cvDrawChessboardCorners()`
- `cvFindHomography()`
- `cvCalibrateCamera2()`
- `cvFindExtrinsicCameraParam2()`