

Análisis de Movimiento

Una secuencia de imágenes que presenta regiones en movimiento, tiene indudablemente asociada información sobre estos movimientos. El problema de este capítulo se refiere a cómo poder extraer esa información. Una primera idea se conoce como "Método de las diferencias". Consideremos, simplificando al máximo nuestro problema, que una región homogénea y de forma rectangular se desplaza hacia la derecha sobre un fondo homogéneo en una secuencia de imágenes obtenidas en los tiempos $t, t+1, t+2, \dots, t+n$.

Supongamos a nuestro rectángulo, en sus sucesivas posiciones, representado por ceros, tal como se ve en la figura siguiente.

Si para dos imágenes sucesivas calculamos las diferencias de brillo en cada posición, y acumulamos unidades cada vez que esta diferencia es no nula, obtenemos los resultados mostrados a la derecha en cada cuadro. (Diferencias Acumuladas)

$t) >>>$	$t+1) >>>$	$t+2)$	$t+3)$
10000	11000 1	11100 21	3
10000	11000 1	11100 21	21
10000	11000 1	11100 21	3
			--

Esto nos sugiere la posibilidad de extraer información relativa a la orientación del movimiento. Si además consideramos que de haber sido mas lento

$t+6$	
000	332211
000	332211
000	332211

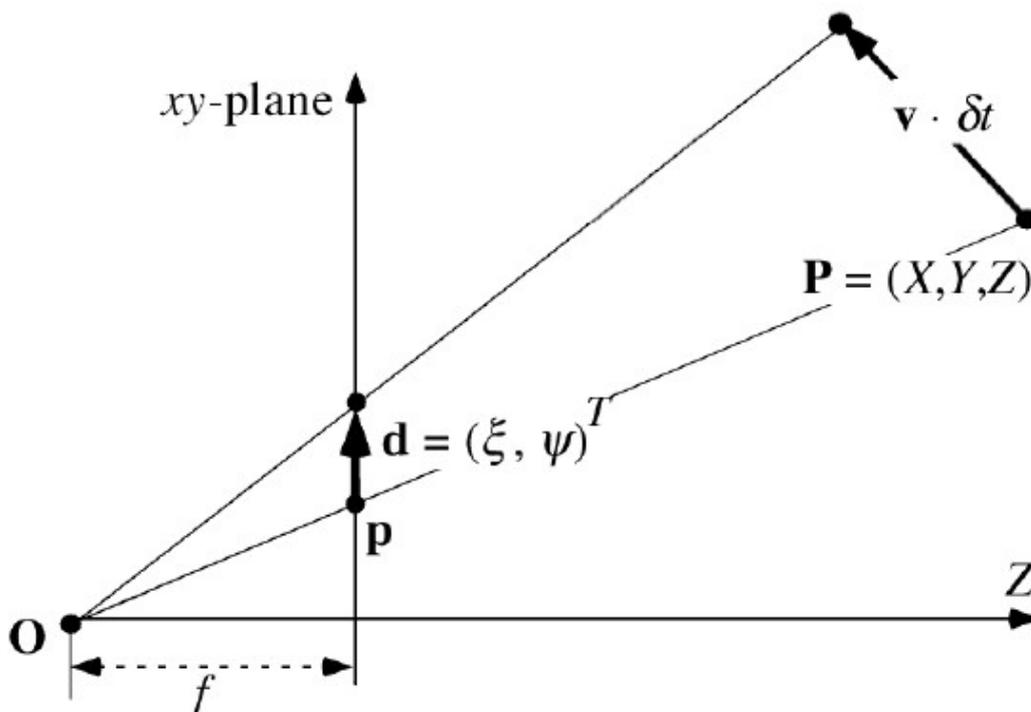
aun el movimiento de la región sobre el fondo, hubiéramos obtenido por ejemplo el patrón siguiente -al cabo de $t+6$ -, podríamos concluir que

la información de velocidad del desplazamiento de los pixels de la región podría también quizás ser extraída. (Aunque sin considerar el gradiente de brillo de la imagen)

Flujo Óptico

Proyección de Movimiento

Considerando una secuencia de imágenes, tomadas con un intervalo Δt entre dos imágenes sucesivas. (p. ej., $\Delta t = 1/60$ si se adquieren a una frecuencia de 60 cuadros p/s), un punto \mathbf{P} en el espacio es proyectado en el tiempo $\tilde{t} \Delta t$ en el punto \mathbf{p} de la imagen. Sea el vector de velocidad \mathbf{v} quien representa un movimiento lineal de \mathbf{P} en el espacio entre $\tilde{t} \Delta t$ y $(\tilde{t} + 1) \Delta t$



El vector $\mathbf{d} = (\xi, \psi)^T$ es la *proyección de movimiento* (Projected Motion) del punto \mathbf{P} entre las imágenes P_t y P_{t+1} , llamado también *Desplazamiento (local)*.

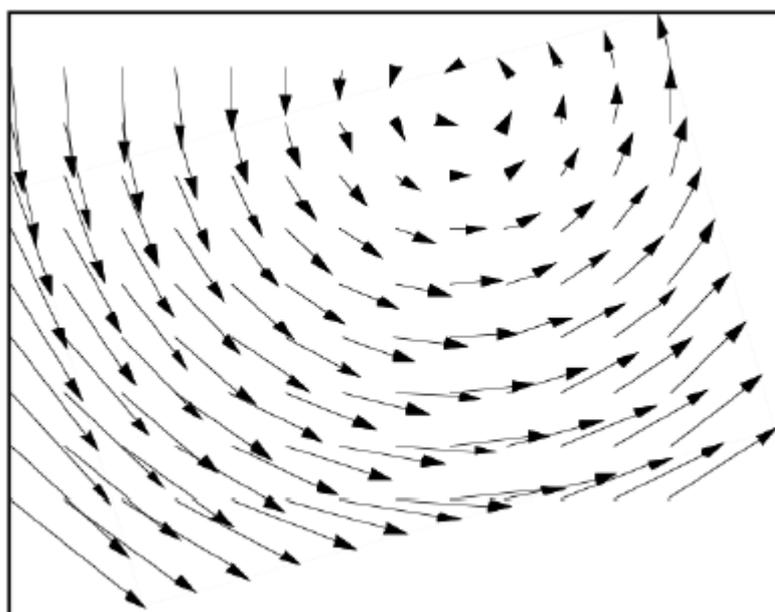
Básicamente se busca conocer el movimiento de un objeto en el espacio, mediante el análisis de las proyecciones de un conjunto de puntos \mathbf{P} ; el

desplazamiento observable $\mathbf{u}=(u, v)$ es llamado *flujo óptico*. En general se considera que este provee una estimación del desplazamiento local.

Ejemplos: Un objeto texturado y una fuente de luz en movimiento (p. ej., el sol) genera flujo óptico (no nulo); una esfera rotando con características de superficie homogéneas y no texturadas produce un flujo óptico nulo.

Campo Vectorial de Desplazamientos

Considerando un objeto plano paralelo al plano de la imagen, rotando alrededor de un punto fijo, se genera el conjunto de vectores de desplazamiento mostrados en la figura. Un conjunto de vectores de desplazamiento forma un *campo vectorial*.



Un cuerpo rígido simplifica el análisis de campos de desplazamiento locales, cuando se desea obtener información sobre la forma del objeto y el tipo de movimiento a partir de la secuencia de imágenes.

Definición (Horn y Schunk)

Flujo óptico es la distribución de las velocidades aparentes del movimiento de los patrones de brillo en una imagen.

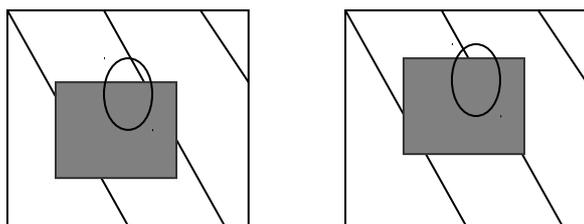
Problema de la apertura

Al observar imágenes proyectadas siempre observamos una porción limitada del movimiento real observable.

Observando solo los discos concluiríamos que el movimiento es solo en sentido vertical.

Perderíamos la información del movimiento en diagonal.

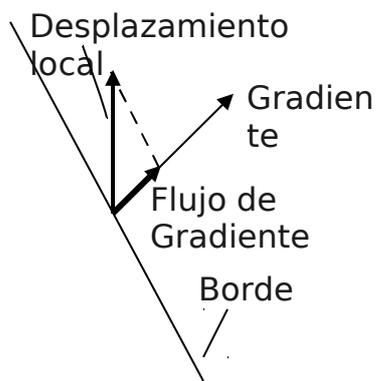
Este problema agrega incertidumbre a la estimación de movimiento.



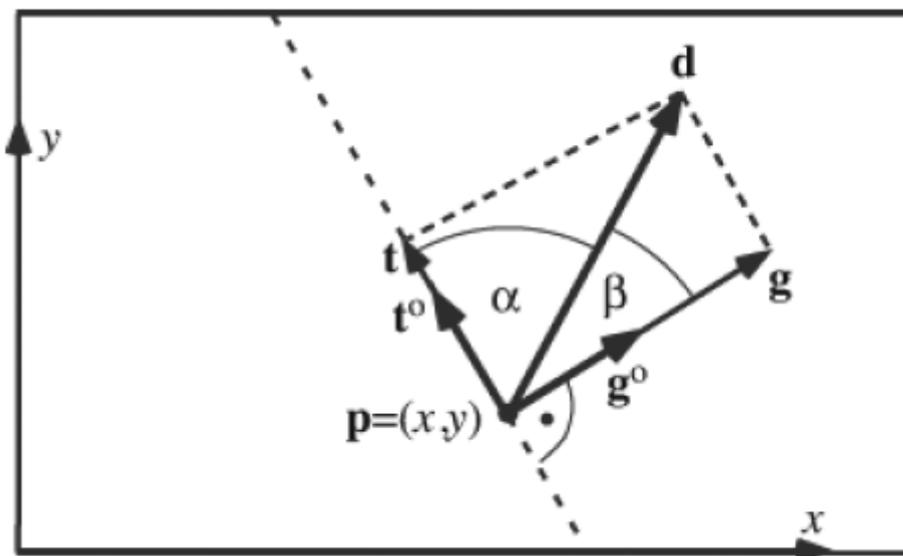
Flujo de Gradiente

Por el Problema de la Apertura, un método local de detección de movimiento detecta en realidad el Flujo del Gradiente (Gradient Flow), este es la proyección del verdadero desplazamiento sobre la

dirección del gradiente.



Formalización del Problema de la Apertura



Considérese el desplazamiento local d y la dirección tangencial t en el punto de borde $p=(x,y)$, donde comienza el vector de desplazamiento local.

El gradiente es ortogonal a la dirección de la tangente. Las componentes del gradiente son las derivadas parciales en ambas direcciones de la imagen.

Los vectores g y t son las proyecciones del desplazamiento sobre la dirección del gradiente y la dirección tangencial y forman un sistema de referencia ortogonal.

Debido al problema de la apertura solo podemos medir g localmente pero no t y d .

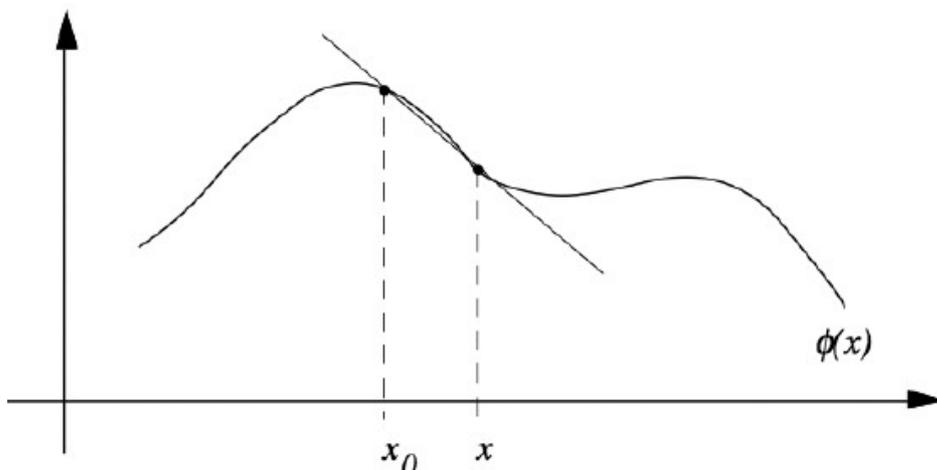
Podemos definir vectores unitarios del tipo $a^0 = a/|a|$ donde $|a|$ es el modulo.

Para el caso planteado se obtienen las siguientes relaciones:

$$g = |g| g^0 = (d \cdot g^0) g^0 \quad \text{y} \quad t = |t| t^0 = (d \cdot t^0) t^0$$

$$\text{Cos}(\alpha) = |t| / |d| \quad \text{y} \quad \text{Cos}(\beta) = |g| / |d|$$

Expansión de Taylor 1D



El cociente de diferencias converge al cociente diferencial:

$$\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{\phi(x_0 + \delta x) - \phi(x_0)}{\delta x} \rightarrow \frac{d\phi(x_0)}{dx}$$

Para $\delta x \rightarrow 0$

Para valores pequeños de δx obtenemos:

$$\phi(x_0 + \delta x) = \phi(x_0) + \delta x \cdot \frac{d\phi(x_0)}{dx} + e$$

Donde el error e es nulo si la función es lineal en el intervalo.

La expresión general de Taylor 1D es:

$$\phi(x_0 + \delta x) = \sum_{i=0,1,2,\dots} \frac{1}{i!} \cdot \delta x^i \cdot \frac{d^i \phi(x_0)}{d^i x}$$

Asumiendo que existen derivadas continuas de cualquier orden.

En nuestro problema planteamos Taylor 3D:

$$I_{t+\partial t}(x+\partial x, y+\partial y) = I(x+\partial x, y+\partial y, t+\partial t) =$$

$$=I(x, y, t) + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} \Delta t + e$$

Asumiendo que la intensidad en una vecindad (local) de la imagen varía linealmente, resulta $e=0$.

Asumiendo además que dicha variación es despreciable entre dos pixels vecinos tenemos:

$$I(x, y, t) = I(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t)$$

Con este planteo los valores $I(x, y, t)$ se anulan:

$$I(x, y, t) = I(x, y, t) + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} \Delta t$$

Con lo que dividiendo por Δt queda:

$$0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t}$$

Siendo $\delta x/\delta t$ y $\delta y/\delta t$ el desplazamiento entre los tiempos t y $t+1$ para un píxel de la imagen.

Asumiendo que ese desplazamiento coincide con el flujo óptico

$u_t(x, y)$ obtenemos la Restricción de Horn Schunck: (1981)

$$0 = u_t(x, y) \frac{\partial I}{\partial x}(x, y, t) + v_t(x, y) \frac{\partial I}{\partial y}(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial t}(x, y, t)$$

La que puede expresarse en forma compacta llamando I a P como:

$$-I_t = \tilde{u} I_x + \tilde{v} I_y = \square \tilde{I} \mathbf{u}$$

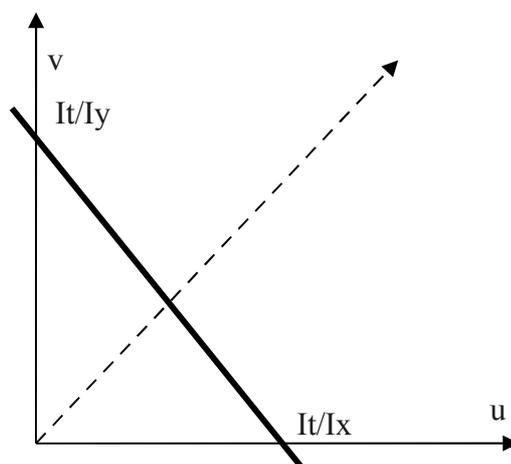
Donde:

- I_x Derivada parcial con respecto a x
- I_y Derivada parcial con respecto a y
- I_t Derivada parcial con respecto a t
- u y v componentes del flujo óptico

La restricción de Horn-Schunk define una línea en el *espacio de velocidades uv*:

Cálculo Teórico del Flujo de Gradiente

Considerando el gráfico de la figura, el flujo óptico correspondiente a un píxel (x, y) en una imagen P_t relativo a imágenes P_{t-1} o P_{t+1} será algún vector que va desde el origen de coordenadas a algún punto sobre la línea recta. La incertidumbre en la definición de este punto final se origina en el problema de la apertura.



Sea a^0 el vector unitario ortogonal a la recta, -el que en general no representa el flujo óptico, $u=d-$, la recta intercepta a los ejes en $(0, -I_t/I_y)$ y $(-I_t/I_x, 0)$ $-I_t$ indica la derivada con respecto a t -

Queda definido el vector $(-I_t/I_x, 0)^T - (0, -I_t/I_y)^T = (-I_t/I_x, I_t/I_y)$ el cual esta sobre la recta. Asimismo $a^0 (-I_t/I_x, I_t/I_y) = 0$

Dividiendo la ec. De flujo óptico $\nabla \mathbf{I} \mathbf{u} = -I_t$ por la longitud $|\nabla \mathbf{I}|$, y empleando luego el vector unitario $(\nabla \mathbf{I})^0$

$$\frac{\nabla \mathbf{I}}{|\nabla \mathbf{I}|} \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{I})^0 \mathbf{u} = \mathbf{g}^0 \mathbf{u}^T = \mathbf{g}^0 \mathbf{d}^T = |\mathbf{g}| = -\frac{I_t}{|\nabla \mathbf{I}|}$$

Siendo g igual a g^0 por su modulo, resulta

$$\mathbf{g} = -\frac{I_t}{|\nabla \mathbf{I}|} (\nabla \mathbf{I})^0$$

Lo que nos provee una fórmula para el cálculo del flujo del gradiente lo que suele resultar en una pobre aproximación del flujo óptico.

Cálculo basado en correspondencias

En el procesamiento de imágenes estereoscópicas, la correspondencia entre puntos o características (*features*) se calcula entre imágenes tomadas prácticamente en forma simultánea. Para el análisis de movimiento la correspondencia entre puntos o características debe ser calculada entre cuadros capturados en tiempos sucesivos, y en general con cámaras tomadas en diferentes posiciones relativas. Buscar la posición de un punto basándose en correspondencias podría ser una solución posible, en particular para resolver también el problema de apertura. La diferencia es que debido a los movimientos posibles no existe una restricción de la zona de búsqueda como en visión estéreo (Por la geometría epipolar). (Una posibilidad es predecir las velocidades esperadas en base a movimientos anteriores aplicando el filtro de kalman)

Métodos Densos y Ralos

Lukas Kanade (Constancia de Intensidad)

Horn Schunk (Constancia de Movimiento
Intensidad)

Introduce una restricción global.

Constancia de Movimiento (Horn-Schunk)

Otra opción es trabajar sobre el concepto de que el movimiento es aproximadamente constante en la proximidad del píxel bajo estudio. Horn & Schunk (1981) propusieron el planteo de dos restricciones simultaneas.

Sea Ω el dominio xy en que esta definida la imagen, se plantea la minimización de la función $F_h(u,v)$

$$\int_{\Omega} \left[u(x,y) I_x(x,y,t) + v(x,y) I_y(x,y,t) + I_t(x,y,t) \right]^2 dx dy$$

Considerando simultáneamente en la minimización la restricción de suavizado (smoothness) $F_s(u,v)$

$$\int_{\Omega} \left[u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y) + v_x^2(x,y) + v_y^2(x,y) \right] dx dy$$

Donde u_x u_y v_x v_y son las derivadas parciales del flujo óptico u, v .

Es decir, estamos buscando la dirección de menor variación de intensidad condicionada a la menor variación de velocidad.

Construyendo el lagrangiano que debe ser minimizado tenemos:

$$F_s(u,v) + \lambda F_h(u,v)$$

Donde el operador de Lagrange pondera la incidencia de cada restricción. El valor de λ determina una mayor o menor influencia de la restricción F_s y da como resultado un campo de flujo más o menos suavizado.

Usualmente $\lambda=10$ suele ser un valor recomendado para estimaciones iniciales, dejando a F_s un pequeño impacto en el resultado.

Notar que esta ecuación lagrangiana, presentada a veces como una “Ecuación de Energía”, también puede plantearse “al revés”

$F_h(u,v) + \lambda F_s(u,v)$ con lo que la incidencia de valores altos de λ depende de la forma en que se construye el Lagrangiano.

Solución por Error Cuadrático Mínimo

Podemos resolver la función vista por optimización LSE.

Para eso en general necesitamos:

1. La función a minimizar. (Función objetivo, ya realizado)
2. Derivadas con respecto a las incógnitas (u y v en todos los píxel de la imagen MxN). Se requiere calcular 2MN derivadas parciales de la función.
3. Igualar derivadas a cero y resolver el sistema obtenido con respecto a las incógnitas. El resultado define el mínimo para la función.

En nuestro caso debemos obtener un modelo discreto de las restricciones. Esto puede hacerse como es usual aproximando las derivadas con diferencias para pixels vecinos.

Para la función de suavizado obtenemos:

$$\sum_{i,j} \frac{1}{4} ((u_{i+1,j} - u_{ij})^2 + (u_{i,j+1} - u_{ij})^2 + (v_{i+1,j} - v_{ij})^2 + (v_{i,j+1} - v_{ij})^2)$$

Para la condición F_h :

$$\sum_{i,j} (I_x(i,j,t) u_{ij} + I_y(i,j,t) v_{ij} + I_t(i,j,t))^2$$

i,j para todos los pixels de la imagen.

Las derivadas parciales de F_s

$$\frac{\partial F_s}{\partial u_{ij}}(u, v)$$

Resultan de la forma

$$-\frac{1}{2} [(u_{i+1,j} - u_{ij}) + (u_{i,j+1} - u_{ij})] + \frac{1}{2} [(u_{ij} - u_{i-1,j}) + (u_{ij} - u_{i,j-1})]$$

Lo que puede simplificarse a

$$2u_{ij} - 2 \left[\frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}) \right]$$

Asignando un nuevo símbolo al promedio que aparece en la expresión anterior: (y considerando análogamente para v)

$$\frac{\partial F_s}{\partial u_{ij}}(u, v) = 2u_{ij} - 2\bar{u}_{ij}$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial v_{ij}}(u, v) = 2v_{ij} - 2\bar{v}_{ij}$$

Las derivadas parciales para F_h

$$2\lambda \left[I_x(i, j, t) u_{ij} + I_y(i, j, t) v_{ij} + I_t(i, j, t) \right]_{x(i, j, t)}$$

$$2\lambda \left[I_x(i, j, t) u_{ij} + I_y(i, j, t) v_{ij} + I_t(i, j, t) \right]_{y(i, j, t)}$$

Igualando a cero el Lagrangiano, reemplazando y ordenando:

$$\bar{u}_{i,j} - u_{i,j} = \lambda \left[I_x(i, j, t) u_{i,j} + I_y(i, j, t) v_{i,j} + I_t(i, j, t) \right] I_x(i, j, t)$$

$$\bar{v}_{i,j} - v_{i,j} = \lambda \left[I_x(i, j, t) u_{i,j} + I_y(i, j, t) v_{i,j} + I_t(i, j, t) \right] I_y(i, j, t)$$

Conformando un sistema de ec. Lineales

$$(1 + \lambda I_x^2(i, j, t)) u_{i,j} + \lambda I_x(i, j, t) I_y(i, j, t) v_{i,j} = \bar{u}_{i,j} - \lambda I_x(i, j, t) I_t(i, j, t)$$

$$\lambda I_x(i, j, t) I_y(i, j, t) u_{i,j} + (1 + \lambda I_y^2(i, j, t)) v_{i,j} = \bar{v}_{i,j} - \lambda I_y(i, j, t) I_t(i, j, t)$$

El cual puede reescribirse en forma simplificada

$$(1 + \lambda I_x^2) u_{ij} + \lambda I_x I_y v_{ij} = \bar{u}_{ij} - \lambda I_x I_t$$

$$\lambda I_x I_y u_{ij} + (1 + \lambda I_y^2) v_{ij} = \bar{v}_{ij} - \lambda I_y I_t$$

Para resolver este sistema podemos calcular el determinante:

$$D_{i,j} = (1 + \lambda I_x^2)(1 + \lambda I_y^2) - \lambda^2 I_x^2 I_y^2$$

El que simplificado resulta:

$$D_{i,j} = 1 + \lambda (I_x^2 + I_y^2)$$

De donde se obtiene la solución

$$u_{ij} = \frac{1}{1 + \lambda (I_x^2 + I_y^2)} \left[(1 + \lambda I_y^2) \bar{u}_{ij} - \lambda I_x (I_t + I_y \bar{v}_{ij}) \right]$$

$$v_{ij} = \frac{1}{1 + \lambda (I_x^2 + I_y^2)} \left[(1 + \lambda I_x^2) \bar{v}_{ij} - \lambda I_y (I_t + I_x \bar{u}_{ij}) \right]$$

En el lado derecho tenemos los promedios de los valores del lado izquierdo lo que sugiere una solución iterativa:

$$u_{ij}^{n+1} = \bar{u}_{ij}^n - \frac{I_x(i,j,t) \bar{u}_{ij}^n + I_y(i,j,t) \bar{v}_{ij}^n + I_t(i,j,t)}{1 + \lambda (I_x^2(i,j,t) + I_y^2(i,j,t))} \lambda I_x(i,j,t)$$

$$v_{ij}^{n+1} = \bar{v}_{ij}^n - \frac{I_x(i,j,t) \bar{u}_{ij}^n + I_y(i,j,t) \bar{v}_{ij}^n + I_t(i,j,t)}{1 + \lambda (I_x^2(i,j,t) + I_y^2(i,j,t))} \lambda I_y(i,j,t)$$

Para iniciar el proceso iterativo necesitaremos valores iniciales

$$u_{ij}^0 \text{ y } v_{ij}^0$$

y podemos implementar una función para:

$$\alpha(x, y, t) = \frac{I_x(i, j, t) \bar{u}_{ij}^n + I_y(i, j, t) \bar{v}_{ij}^n + I_t(i, j, t)}{1 + \lambda (I_x^2(i, j, t) + I_y^2(i, j, t))}$$

Algoritmo Horn Schunk

(En el pseudo código y fórmulas siguientes $P = I$)

```
begin  
  for  $j := 1$  to  $N$  do for  $i := 1$  to  $M$  do begin  
    compute  $P_x(i, j, t)$ ,  $P_y(i, j, t)$ , and  $\dot{P}(i, j, t)$  ;  
    initialize  $u(i, j)$  and  $v(i, j)$   
  end {for} ;  
  select weight factor  $\lambda$ ; select  $T > 1$ ;  $n := 1$  ;  
  while  $n \leq T$  do begin  
    for  $j := 1$  to  $N$  do for  $i := 1$  to  $M$  do begin  
      compute  $u(i, j) := \bar{u} - \alpha \cdot P_x(i, j, t)$  ;  
      compute  $v(i, j) := \bar{v} - \alpha \cdot P_y(i, j, t)$   
    end {for} ;  
     $n := n + 1$   
  end {while}  
end
```

- \bar{v} son los promedios de los 4-vecinos correspondientes

El algoritmo en su versión original usa 0 como valores iniciales y las aproximaciones siguientes:

$$P_x(i, j, t) = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{l} P(i+1, j, t) + P(i+1, j, t+1) + P(i+1, j+1, t) \\ + P(i+1, j+1, t+1) \\ - \frac{1}{4} \left[\begin{array}{l} P(i, j, t) + P(i, j, t+1) + P(i, j+1, t) \\ + P(i, j+1, t+1) \end{array} \right] \end{array} \right]$$

$$P_y(i, j, t) = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{l} P(i, j+1, t) + P(i, j+1, t+1) + P(i+1, j+1, t) \\ + P(i+1, j+1, t+1) \end{array} \right] - \frac{1}{4} \left[\begin{array}{l} P(i, j, t) + P(i, j, t+1) + P(i+1, j, t) \\ + P(i+1, j, t+1) \end{array} \right]$$

$$\dot{P}(i, j, t) = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{l} P(i, j, t+1) + P(i, j+1, t+1) + P(i+1, j, t+1) \\ + P(i+1, j+1, t+1) \end{array} \right] - \frac{1}{4} \left[\begin{array}{l} P(i, j, t) + P(i, j+1, t) + P(i+1, j, t) \\ + P(i+1, j+1, t) \end{array} \right]$$

Como suele ocurrir hay varias alternativas posibles, p ej. Aproximar las derivadas con muy pocos píxel (2 pixels). O bien determinar el valor de inicialización eligiendo un punto sobre la recta definida por la restricción Horn-Schunk en el espacio de velocidades u y v .

Luego de este primer algoritmo, se han propuesto otros para determinar el flujo óptico.

Como suele ocurrir en otros casos, en la práctica se mejoran o estabilizan los resultados de este algoritmo en su forma pura aplicando algoritmos adicionales.

Tópicos para profundizar el análisis

1. Evaluación de la precisión y densidad de las velocidades estimadas.
2. Influencia de los valores iniciales (λ, u, v), y de las aproximaciones empleadas para las derivadas respecto x y t
3. Influencia de derivadas de flujo óptico en la definición de F_s

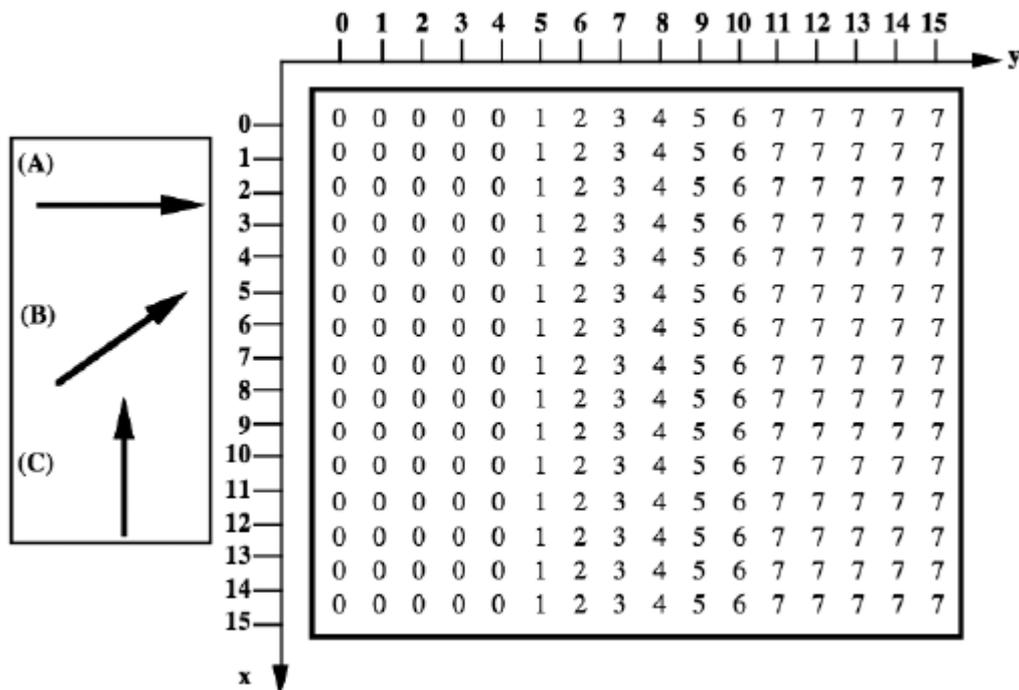
Actividad de laboratorio

1. Implementar el algoritmo
2. Emplear al menos un par de imágenes con diferencias mínimas en la escena. (Movimiento limitado a un máximo de 5 o 6 pixels de distancia)
3. Probar ambas estrategias de inicialización
4. Proponer y probar un esquema alternativo para la aproximación de las derivadas
5. Al final de cada iteración calcular el promedio de los cambios en u y v comparado al paso anterior
6. Aplicar la estrategia de detener el algoritmo si el promedio anterior es menor a un valor umbral
7. Discutir cuantas iteraciones son necesarias.
8. Discutir como influencia la cantidad de iteraciones necesarias el esquema de inicialización
9. Discutir como influencia la cantidad de iteraciones necesarias la estrategia usada para calcular las derivadas
10. Una inicialización a cero, no será útil si los valores obtenidos en ese paso inicial son cero. Mostrar que en general es una condición que no se da.

11. Aplicar la codificación al problema planteado en el párrafo siguiente para resolución manual, usando cero como inicialización y aproximación de 2 pixel para las derivadas de x, y, t .

Prueba del algoritmo

Dada la imagen P1:



Y definiendo la imagen siguiente P2 según un desplazamiento de 1 pixel en las tres orientaciones graficadas a la izquierda, de modo que los pixels que ingresan repiten a los existentes en las filas o columnas de borde de la imagen.

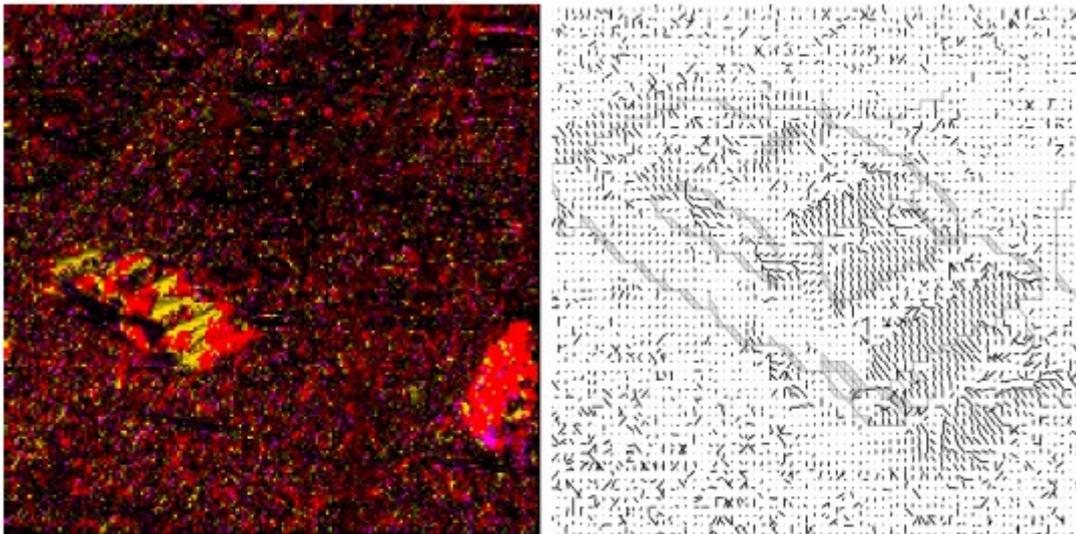
Calcular manualmente los valores producidos por el algoritmo HS para las 3 primeras iteraciones, empleando 0 como valores de inicialización y un esquema de aproximación de 2 pixels para las derivadas en x , y y t

Ejemplos:

Secuencia de dos imágenes



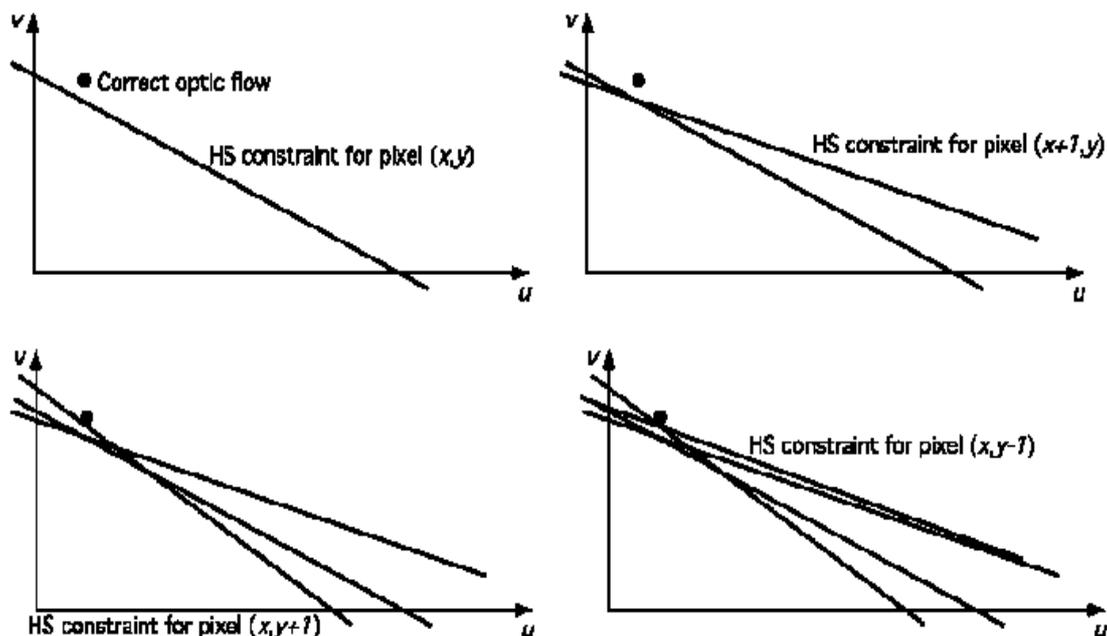
Representación de vectores de magnitud >0 y direcciones en colores



- Lucas Kanade

La restricción de Horn-Schunk especifica entonces una recta

$\tilde{u} P_x + \tilde{v} P_y + P_t = 0$ en el espacio de velocidades u v , para cada pixel.



Considerando un conjunto de pixels en una vecindad local, cada uno de ellos tendrá asociada una recta. En general estas rectas no serán paralelas, pero definidas por velocidades similares. Estas rectas se intersectan en un punto el que da aproximadamente la verdadera velocidad del conjunto.

Es posible pensar entonces que el desplazamiento local real puede aproximarse aplicando esta idea. Por ejemplo en el caso de una característica de la imagen en movimiento, existe en la vecindad del pixel considerado.

Las gráficas anteriores ilustran la situación posible de otros pixels en la vecindad del pixel bajo estudio. Esto da lugar a establecer -como una hipótesis de

trabajo- que el flujo es constante en una vecindad del pixel considerado en cualquier instante. Esta suposición -asumir un flujo local constante- es la base de uno de los métodos mas populares para estimar el flujo óptico, conocido como método de Lucas-Kanade (Bruce D. Lucas y Takeo Kanade).

El método se basa en la ecuación de flujo óptico:

$$\tilde{u} P_x + \tilde{v} P_y = -P_t$$

La restricción adicional necesaria para la estimación del campo de flujo es introducida asumiendo constancia de flujo en una pequeña vecindad $m \times m$ con $m > 1$, centrada en el pixel x, y .

Numerando los pixels de $1 \dots m \times m$, se puede definir un sistema de ecuaciones:

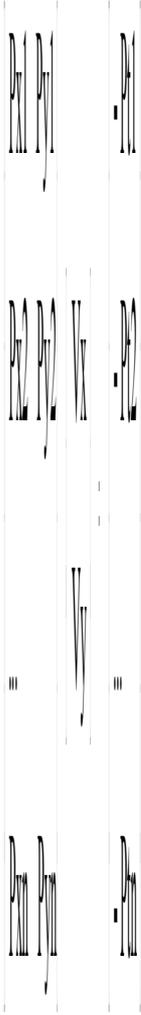
$$u_1 \tilde{P}_{x1} + v_1 \tilde{P}_{y1} = -P_{t1}$$

$$u_2 \tilde{P}_{x2} + v_2 \tilde{P}_{y2} = -P_{t2}$$

...

$$u_n \tilde{P}_{xn} + v_n \tilde{P}_{yn} = -P_{tn}$$

Siendo este un sistema de 2 incógnitas y mayor número de ecuaciones, o sea sobredeterminado.



$$\mathbf{A}\mathbf{v} = -\mathbf{b}$$

Solución

Para resolver un sistema sobredeterminado podemos aplicar el método general de los mínimos cuadrados (LSM), obteniendo

$$\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}'\mathbf{-b}$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{-b}$$