

Geometría epipolar

Reconstrucción y visión estéreo

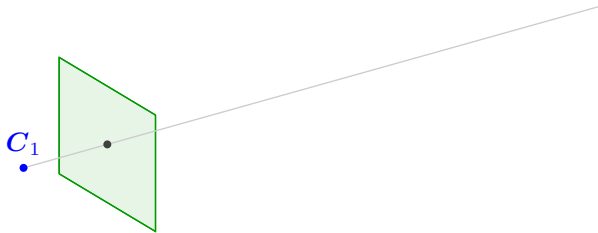
Gastón Araguás

Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería
Universidad Tecnológica Nacional, F.R.C.
Córdoba, Argentina
<http://ciiii.frc.utn.edu.ar>



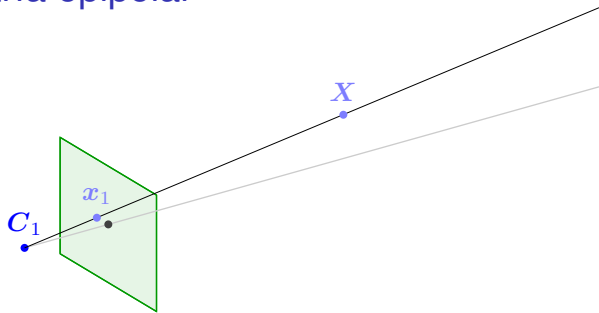
8 de noviembre de 2013

Geometría epipolar



$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$

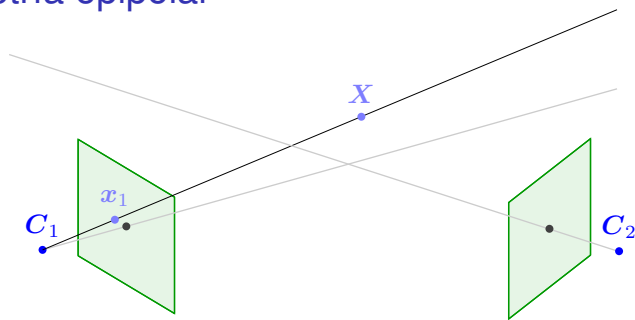
Geometría epipolar



$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 = P_1 \mathbf{X}$$

Geometría epipolar

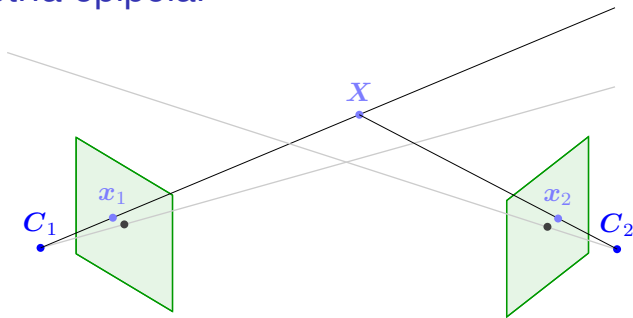


$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 = P_1 \mathbf{X}$$

$$P_2 = K_2[R|\mathbf{t}]$$

Geometría epipolar



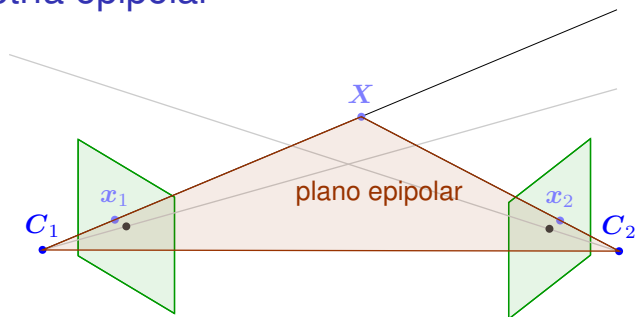
$$P_1 = K_1[I|\mathbf{0}]$$

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 = P_1 \mathbf{X}$$

$$P_2 = K_2[R|\mathbf{t}]$$

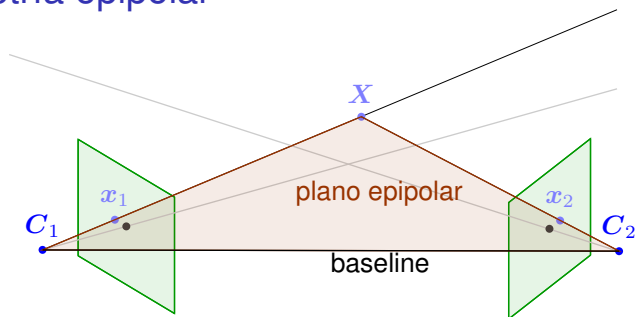
$$\lambda_2 \mathbf{x}_2 = P_2 \mathbf{X}$$

Geometría epipolar



El punto X y los centros de las cámaras forman un plano, llamado **plano epipolar**

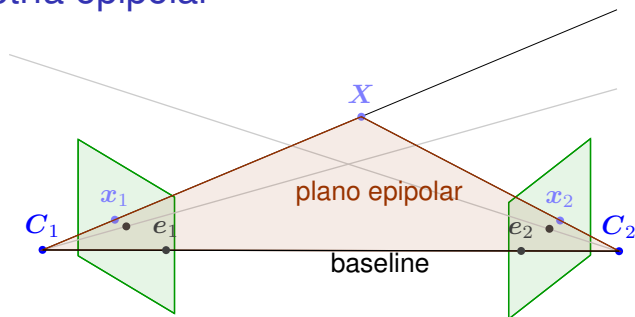
Geometría epipolar



El punto X y los centros de las cámaras forman un plano, llamado **plano epipolar**

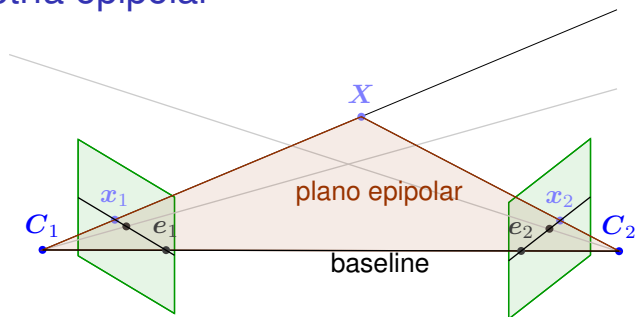
La línea que une los centros de las cámaras se llama **línea base** o **baseline**

Geometría epipolar



Los puntos de intersección de la línea base con los planos de imagen se llaman **epípolos**

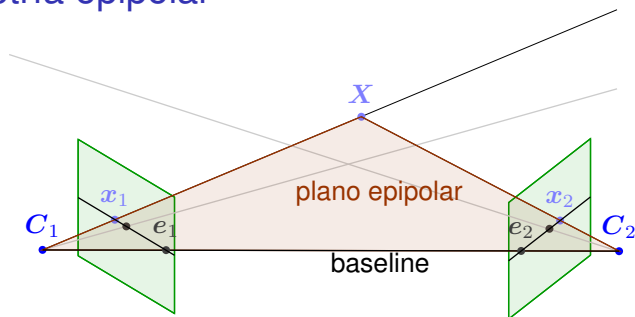
Geometría epipolar



Los puntos de intersección de la línea base con los paneles de imagen se llaman **epípolos**

La línea que une los epípolos con los puntos proyectados x_1 y x_2 se llaman **líneas epipolares**

Geometría epipolar



De que sirven conocer las líneas epipolares y los epipolos?
Vamos a GeoGebra¹...

¹<http://www.geogebra.org>

Geometría epipolar

- ▶ La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas

Geometría epipolar

- ▶ La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas
- ▶ Es independiente de la escena, depende sólo de las cámaras

Geometría epipolar

- ▶ La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas
- ▶ Es independiente de la escena, depende sólo de las cámaras
- ▶ Algebraicamente se define como

$$\mathbf{x}_2^T F \mathbf{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1^T F^T \mathbf{x}_2 = 0$$

donde F es una matriz 3×3 llamada **matriz fundamental**

Geometría epipolar

- ▶ La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas
- ▶ Es independiente de la escena, depende sólo de las cámaras
- ▶ Algebraicamente se define como

$$\mathbf{x}_2^T F \mathbf{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1^T F^T \mathbf{x}_2 = 0$$

donde F es una matriz 3×3 llamada **matriz fundamental**

- ▶ A partir de la proyección

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 = K_1 [I | \mathbf{0}] \mathbf{X}$$

$$\lambda_2 \mathbf{x}_2 = K_2 [R | \mathbf{t}] \mathbf{X}$$

Geometría epipolar

- ▶ La geometría epipolar es la geometría proyectiva entre dos vistas
- ▶ Es independiente de las escena, depende sólo de las cámaras
- ▶ Algebraicamente se define como

$$\mathbf{x}_2^T F \mathbf{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1^T F^T \mathbf{x}_2 = 0$$

donde F es una matriz 3×3 llamada **matriz fundamental**

- ▶ A partir de la proyección

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 = K_1 [I | \mathbf{0}] \mathbf{X}$$

$$\lambda_2 \mathbf{x}_2 = K_2 [R | \mathbf{t}] \mathbf{X}$$

operando se llega a

$$F = K_2^{-T} [\mathbf{t}]_x R K_1^{-1}$$

con $[\mathbf{t}]_x$ una matriz antisimétrica

$$[\mathbf{t}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Geometría epipolar

Línea epipolar

Como x_2 se mapea en su línea epipolar l_2 se tiene que $l_2 = Fx_1$, ya que

$$x_2^T Fx_1 = x_2^T l_2 = 0$$

igualmente, de $x_1^T F^T x_2 = 0$ se tiene $l_1 = F^T x_2$

Geometría epipolar

Línea epipolar

Como x_2 se mapea en su línea epipolar l_2 se tiene que $l_2 = Fx_1$, ya que

$$x_2^T Fx_1 = x_2^T l_2 = 0$$

igualmente, de $x_1^T F^T x_2 = 0$ se tiene $l_1 = F^T x_2$

Epípolos

Los epípolos pertenecen a todas las líneas epipolares, entonces para toda línea epipolar $l_1 = F^T x_2$

$$e_1^T F^T x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1^T F^T = Fe_1 = 0$$

Geometría epipolar

Línea epipolar

Como x_2 se mapea en su línea epipolar l_2 se tiene que $l_2 = Fx_1$, ya que

$$x_2^T Fx_1 = x_2^T l_2 = 0$$

igualmente, de $x_1^T F^T x_2 = 0$ se tiene $l_1 = F^T x_2$

Epípolos

Los epípolos pertenecen a todas las líneas epipolares, entonces para toda línea epipolar $l_1 = F^T x_2$

$$e_1^T F^T x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1^T F^T = F e_1 = 0$$

idénticamente

$$e_2^T Fx_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2^T F = F^T e_2 = 0$$

Geometría epipolar

Matriz esencial E

Si se conoce K_1 y K_2 se puede normalizar

$$\lambda_1 K_1^{-1} \mathbf{x}_1 = K_1^{-1} P_1 \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \hat{\mathbf{x}}_1 = [I | \mathbf{0}] \mathbf{X}$$

$$\lambda_2 K_2^{-1} \mathbf{x}_2 = K_2^{-1} P_2 \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 \hat{\mathbf{x}}_2 = [R | \mathbf{t}] \mathbf{X}$$

$K^{-1}P$ se llama cámara normalizada y el sistema se dice calibrado.

Geometría epipolar

Matriz esencial E

Si se conoce K_1 y K_2 se puede normalizar

$$\lambda_1 K_1^{-1} \mathbf{x}_1 = K_1^{-1} P_1 \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \hat{\mathbf{x}}_1 = [I | \mathbf{0}] \mathbf{X}$$

$$\lambda_2 K_2^{-1} \mathbf{x}_2 = K_2^{-1} P_2 \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 \hat{\mathbf{x}}_2 = [R | \mathbf{t}] \mathbf{X}$$

$K^{-1}P$ se llama cámara normalizada y el sistema se dice calibrado.

La matriz fundamental de un sistema calibrado se llama **matriz esencial** E .

$$\hat{\mathbf{x}}_2^T E \hat{\mathbf{x}}_1 = 0$$

con $E = K_2^T F K_1 = [\mathbf{t}]_x R$.

Geometría epipolar

Cálculo de F

Desarrollando $\mathbf{x}_2^T F \mathbf{x}_1 = 0$ con $\mathbf{x}_1 = [x_1, y_1, 1]^T$ y $\mathbf{x}_2 = [x_2, y_2, 1]^T$

$$\begin{aligned} & x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} + \\ & + y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0 \end{aligned}$$

Geometría epipolar

Cálculo de F

Desarrollando $\mathbf{x}_2^T F \mathbf{x}_1 = 0$ con $\mathbf{x}_1 = [x_1, y_1, 1]^T$ y $\mathbf{x}_2 = [x_2, y_2, 1]^T$

$$\begin{aligned} &x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} + \\ &+ y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0 \end{aligned}$$

F puede hallarse hasta un factor de escala, por lo que se necesitan 8 puntos correspondientes

$$A\mathbf{f} = 0$$

Geometría epipolar

Cálculo de F

Desarrollando $\mathbf{x}_2^T F \mathbf{x}_1 = 0$ con $\mathbf{x}_1 = [x_1, y_1, 1]^T$ y $\mathbf{x}_2 = [x_2, y_2, 1]^T$

$$\begin{aligned} &x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} + \\ &+ y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0 \end{aligned}$$

F puede hallarse hasta un factor de escala, por lo que se necesitan 8 puntos correspondientes

$$A\mathbf{f} = 0$$

Con $n > 8$ el sistema queda sobredeterminado, puede resolverse usando SVD para minimizar $\|A\mathbf{f}\|$ sujeto a $\|\mathbf{f}\| = 1$

Geometría epipolar

La fundamental más cercana

F debe ser singular, de rango 2. Se puede forzar usando SVD para hacer cero el último valor singular

$$F = UDV^T = U \text{diag}(r, s, t)V^T; \quad r \geq s \geq t$$
$$F' = U \text{diag}(r, s, 0)V^T$$

donde F' es la matriz singular más cercana a F en términos de la norma de Frobenius

$$\text{mín } \|F - F'\|_F$$

El algoritmo se conoce como **algoritmo de los ocho puntos**.

Geometría epipolar

La fundamental más cercana

F debe ser singular, de rango 2. Se puede forzar usando SVD para hacer cero el último valor singular

$$F = UDV^T = U \text{diag}(r, s, t)V^T; \quad r \geq s \geq t$$
$$F' = U \text{diag}(r, s, 0)V^T$$

donde F' es la matriz singular más cercana a F en términos de la norma de Frobenius

$$\text{mín } \|F - F'\|_F$$

El algoritmo se conoce como **algoritmo de los ocho puntos**.

- ▶ Requiere normalización.

Geometría epipolar

La fundamental más cercana

F debe ser singular, de rango 2. Se puede forzar usando SVD para hacer cero el último valor singular

$$F = UDV^T = U \text{diag}(r, s, t)V^T; \quad r \geq s \geq t$$
$$F' = U \text{diag}(r, s, 0)V^T$$

donde F' es la matriz singular más cercana a F en términos de la norma de Frobenius

$$\text{mín } \|F - F'\|_F$$

El algoritmo se conoce como **algoritmo de los ocho puntos**.

- ▶ Requiere normalización.
- ▶ Los puntos $n \geq 8$ no deben ser coplanares.

Geometría epipolar

Algoritmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{x}_i = Tx_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0, 0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al origen sea $\sqrt{2}$

Geometría epipolar

Algoritmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{x}_i = T x_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0, 0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al origen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar \bar{F}' tal que $\bar{x}_2^T \bar{F}' \bar{x}_1 = 0$ para todo x_1 y x_2

Geometría epipolar

Algoritmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{x}_i = T x_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0, 0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al origen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar \bar{F}' tal que $\bar{x}_2^T \bar{F}' \bar{x}_1 = 0$ para todo x_1 y x_2
 - ▶ \bar{F} es el vector singular correspondiente al menor valor singular de A

Geometría epipolar

Algoritmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{x}_i = T x_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0, 0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al origen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar \bar{F}' tal que $\bar{x}_2^T \bar{F}' \bar{x}_1 = 0$ para todo x_1 y x_2
 - ▶ \bar{F} es el vector singular correspondiente al menor valor singular de A
 - ▶ $\bar{F}' = U \text{diag}(r, s, 0) V^T$ con $\bar{F} = U \text{diag}(r, s, t) V^T$

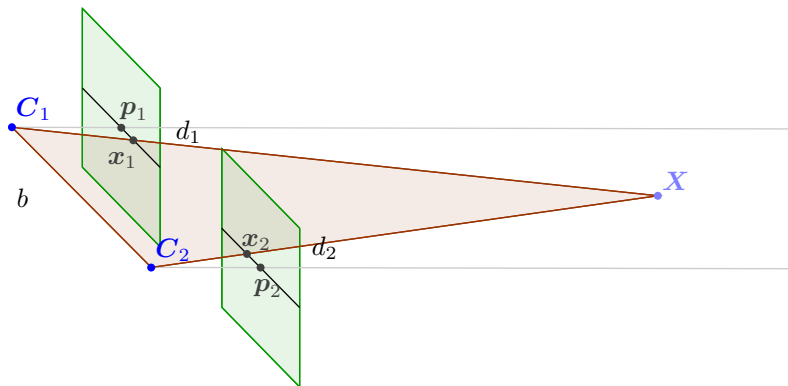
Geometría epipolar

Algoritmo de los ocho puntos

1. Normalización: $\bar{x}_i = T x_i$ en ambas imágenes, tal que el centro de masa de los puntos sea $(0, 0)$ y la RMS de las distancias de los puntos al origen sea $\sqrt{2}$
2. Cómputo: Encontrar \bar{F}' tal que $\bar{x}_2^T \bar{F}' \bar{x}_1 = 0$ para todo x_1 y x_2
 - ▶ \bar{F} es el vector singular correspondiente al menor valor singular de A
 - ▶ $\bar{F}' = U \text{diag}(r, s, 0) V^T$ con $\bar{F} = U \text{diag}(r, s, t) V^T$
3. Denormalización: $F = T_2^T \bar{F}' T_1$

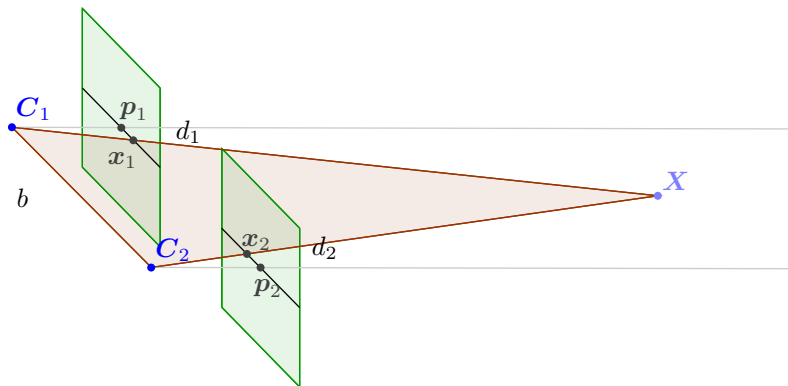
Visión estéreo

Dos cámaras con su eje focal paralelo y sus planos de imagen coincidentes conforman un arreglo estéreo (stereo rig)



Visión estéreo

Dos cámaras con su eje focal paralelo y sus planos de imagen coincidentes conforman un arreglo estéreo (stereo rig)

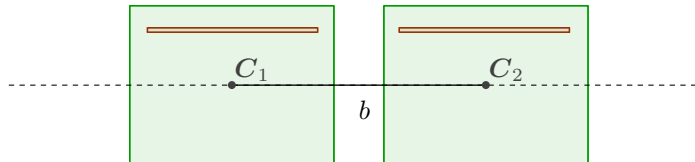


La profundidad es proporcional a d_1 y d_2 . GeoGebra!!

Visión estéreo

Las líneas epipolares pueden ser horizontales o inclinadas.

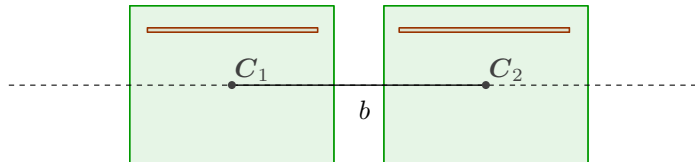
Ventanas de búsqueda horizontales



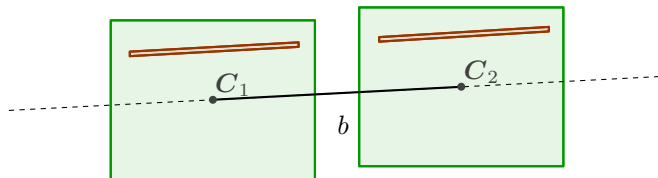
Visión estéreo

Las líneas epipolares pueden ser horizontales o inclinadas.

Ventanas de búsqueda horizontales



Ventanas de búsqueda inclinadas

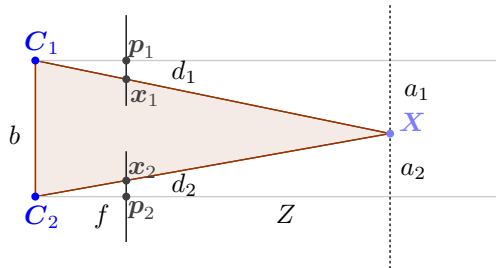


Visión estéreo

Después de **calibrar** (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)

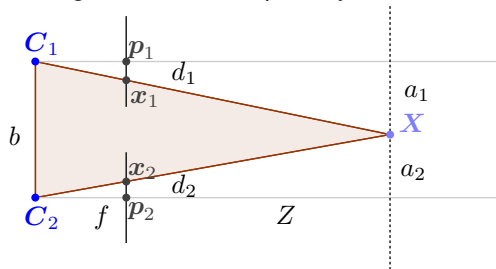
Visión estéreo

Después de **calibrar** (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)



Visión estéreo

Después de **calibrar** (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)

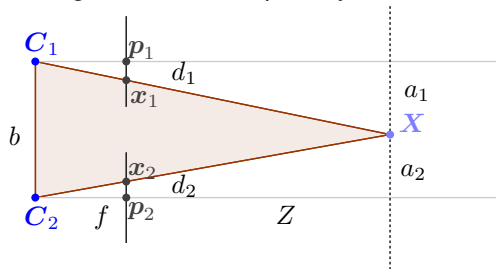


$$\frac{a_1}{Z} = \frac{d_1}{f}$$

$$\frac{a_2}{Z} = \frac{d_2}{f}$$

Visión estéreo

Después de **calibrar** (encontrar la transformación que warpea ambas imágenes al mismo plano y ambos centros a la misma distancia f)



$$\frac{a_1}{Z} = \frac{d_1}{f}$$

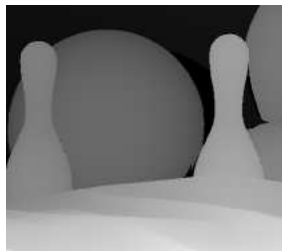
$$\frac{a_2}{Z} = \frac{d_2}{f}$$

$$b = a_1 + a_2 = Z \frac{d_1}{f} + Z \frac{d_2}{f} \Rightarrow Z = \frac{fb}{d}$$

d se llama disparidad, y se representa como una imagen.

Visión estéreo

Mapa de disparidad



Reconstrucción 3D

Para reconstrucción 3D a partir de dos vistas se deben conocer P_1 y P_2



Reconstrucción 3D

Para reconstrucción 3D a partir de dos vistas se deben conocer P_1 y P_2



Sin conocer K sólo puede recuperarse P_1 y P_2 hasta una proyectividad (a partir de F)



Reconstrucción 3D

Para reconstrucción 3D a partir de dos vistas se deben conocer P_1 y P_2



A partir de E se pueden recuperar P_1 y P_2 hasta un factor de escala (reconstrucción métrica).
Se obtienen 4 soluciones, pero sólo una proyecta puntos frente a la cámara.



Reconstrucción 3D

Triangulación

Conocidas P_1 y P_2 , a partir de las proyecciones $\lambda_1 \mathbf{x}_1 = P_1 \mathbf{X}$ y $\lambda_2 \mathbf{x}_2 = P_2 \mathbf{X}$

$$\begin{bmatrix} P_1 & -\mathbf{x}_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & -\mathbf{0} & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$A[X, Y, Z, W, \lambda_1, \lambda_2]^T = 0$$

con A una matriz de 6×6 , cuya solución puede encontrarse por SVD.

Reconstrucción 3D

Triangulación

Conocidas P_1 y P_2 , a partir de las proyecciones $\lambda_1 \mathbf{x}_1 = P_1 \mathbf{X}$ y $\lambda_2 \mathbf{x}_2 = P_2 \mathbf{X}$

$$\begin{bmatrix} P_1 & -\mathbf{x}_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & -\mathbf{0} & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$A[X, Y, Z, W, \lambda_1, \lambda_2]^T = 0$$

con A una matriz de 6×6 , cuya solución puede encontrarse por SVD.

El proceso de estimación de la geometría epipolar y la reconstrucción de la escena 3D se conoce con el nombre de **estructura a partir del movimiento**, o **SfM** por sus siglas en inglés.

Reconstrucción 3D

Algoritmo SfM

1. Correspondencias: Determinar características y establecer las correspondencias

Reconstrucción 3D

Algoritmo SfM

1. Correspondencias: Determinar características y establecer las correspondencias
2. Cálculo de E : algoritmo de los ocho puntos + RANSAC.

Reconstrucción 3D

Algoritmo SfM

1. Correspondencias: Determinar características y establecer las correspondencias
2. Cálculo de E : algoritmo de los ocho puntos + RANSAC.
3. Obtener P_2 : 4 soluciones posibles de $E = [t]_x R$

Reconstrucción 3D

Algoritmo SfM

1. Correspondencias: Determinar características y establecer las correspondencias
2. Cálculo de E : algoritmo de los ocho puntos + RANSAC.
3. Obtener P_2 : 4 soluciones posibles de $E = [t]_x R$
4. Elegir P_2 : Usando triangulación determinar cuál solución mapea más puntos delante de la cámara

Reconstrucción 3D

Algoritmo SfM

1. Correspondencias: Determinar características y establecer las correspondencias
2. Cálculo de E : algoritmo de los ocho puntos + RANSAC.
3. Obtener P_2 : 4 soluciones posibles de $E = [t]_x R$
4. Elegir P_2 : Usando triangulación determinar cuál solución mapea más puntos delante de la cámara
5. Triangulación: reconstrucción de los puntos 3D.