Geometría Proyectiva

Homografías

Gastón Araguás

Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería
Universidad Tecnológica Nacional, F.R.C.
http://ciii.frc.utn.edu.ar
Córdoba, Argentina

21 de noviembre de 2011

Coordenadas homogeneas

Puntos y rectas

Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

Una recta en el plano $ax + by + c = 0$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [a, b, c]^T$$

pero $\boldsymbol{l} = [ka, kb, kc]^T$, con $k \neq 0$, representa la misma recta.

- Una recta tienen 2 DOF, dado por los cocientes de sus componentes $\{a : b : c\}$.
- Estos vectores equivalentes se conocen como vectores homogeneos.
- El conjunto de vectores homogeneos en $\mathbb{R}^3$, menos el vector $[0, 0, 0]^T$, forman el espacio proyectivo $\mathbb{P}^2$.

Coordenadas homogeneas

Puntos y rectas

Un punto (x, y) pertenece a la recta $\boldsymbol{l}$ si $ax + by + c = 0$, o bien,

$$[x, y, 1][a, b, c]^T = 0$$

El vector $[x, y, 1]^T$ es la representación del punto (x, y) en coordenadas homogeneas.

Punto en coordenadas homogeneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$, (con $x_3 \neq 0$,) se representa en coordenadas homogeneas por el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$ dado por

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por $\{x_1 : x_2 : x_3\}$

Por lo anterior ...

Punto en una recta

Sean el punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$ y la recta $\boldsymbol{l} \in \mathbb{P}^2$, entonces $\boldsymbol{x}$ está en $\boldsymbol{l}$ si

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^T\boldsymbol{x} = 0$$

Observación: El producto escalar entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{l}$ también es nulo, ya que

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{l} = ax + by + c = 0$$

por lo que los vectores son perpendiculares.

Coordenadas homogeneas

Rectas y puntos

Intersección de dos rectas

Sean $\boldsymbol{l}_1$ y $\boldsymbol{l}_2$ dos rectas en $\mathbb{P}^2$. Definiendo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2$, que es un vector perpendicular a ambas rectas, tal que el producto escalar

$$\boldsymbol{l}_1.(\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2) = \boldsymbol{l}_2.(\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2) = 0$$

es decir

$$\boldsymbol{l}_1^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}_2^T \boldsymbol{x} = 0$$

luego, si $\boldsymbol{x}$ representa a un punto, este es el punto de intersección de $\boldsymbol{l}_1$ y $\boldsymbol{l}_2$.

Coordenadas homogeneas

Rectas y puntos

Recta por dos puntos

Sean $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ dos puntos en $\mathbb{P}^2$. Definiendo $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ se tiene

$$\boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

luego, el vector $\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ representa a la recta $\boldsymbol{l}$ que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$.

Dualidad

Debido a la representación dual de rectas y puntos, los enunciados tiene siempre su forma dual.

En este caso la recta que pasa por dos puntos es dual al anterior, que puede leerse como “el punto que pasa por dos rectas”.

Coordenadas homogeneas

Rectas paralelas - Punto en el infinito

Que pasa con las paralelas?

Intersección de rectas paralelas

Sean $\boldsymbol{l} = [a, b, c]^T$ y $\boldsymbol{l}' = [a, b, c']^T$ dos rectas paralelas en $\mathbb{P}^2$, la intersección de las rectas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ será

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T$$

con $\boldsymbol{x}$ un punto ideal o punto en el infinito.

Punto en el infinito

Un punto en $\mathbb{P}^2$ de coordenadas

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$$

no representa ningún punto finito en el plano, se le llama punto ideal o punto en el infinito.

Recta en el infinito

Todo punto ideal $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$ pertenece a la recta $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$, ya que

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

$\boldsymbol{l}_\infty$ se llama recta en el infinito.

Intersección con l_∞

La intersección de las rectas paralelas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ con $\boldsymbol{l}_\infty$ es en el punto ideal $\boldsymbol{x} = [b, -a, 0]^T$

$$[b, -a, 0]^T \boldsymbol{l} = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

- Notar que el vector $[b, -a]^T \in \mathbb{R}^2$ representa la dirección de la recta $\boldsymbol{l} = [a, b, c]^T$. Por lo tanto

$$\boldsymbol{l}_\infty : \{\text{Conjunto de direcciones de rectas de } \mathbb{R}^2\}$$

Coordenadas homogeneas

Cónicas

Una cónica en $\mathbb{R}^2$ es de la forma: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, en coordenadas homogeneas

$$x \to \frac{x_1}{x_3}; y \to \frac{x_2}{x_3} \Rightarrow$$

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$$

En forma de producto matricial

Cónica en coordenadas homogeneas

Sea el punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$, $\boldsymbol{x}$ está en la cónica C si

$$\boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} = 0 \quad \text{con} \quad C = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

una matriz en $\mathbb{P}^2$ que representa la cónica C

Nota: Una cónica tiene 5 DOF, $\{a : b : c : d : e : f\}$.

Recta tangente a la cónica

Sea la recta $\boldsymbol{l} \in \mathbb{P}^2$ definida como $\boldsymbol{l} = C\boldsymbol{x}$, si el punto $\boldsymbol{x}$ pertenece a la cónica, pertenece también a $\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{x} = 0$$

y además $\boldsymbol{l}$ corta a la cónica C en ese solo punto.

Si otro punto $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{l}$ pertenece también a C

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{l} = \boldsymbol{y}^T C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T C\boldsymbol{y} = 0$$

pero entonces todo punto de forma $(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y})$ que pertenece a $\boldsymbol{l}$ también pertenece a C

$$(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y})^T C(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}) = 0$$

y toda la recta pretenece a C. Se dice que C es una cónica degenerada.

Coordenadas homogeneas

Cónica dual

Una cónica definida como $\boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} = 0$ se llama cónica de puntos. También puede definirse en términos de las rectas tangentes cuando C es invertible.

Cónica de rectas

Sea $\boldsymbol{l} = C\boldsymbol{x}$, luego $\boldsymbol{x} = C^{-1}\boldsymbol{l}$, entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow (C^{-1}\boldsymbol{l})^T C (C^{-1}\boldsymbol{l}) &= 0 \\ (\boldsymbol{l}^T C^{-T}) C (C^{-1}\boldsymbol{l}) &= 0 \\ \boldsymbol{l}^T C^{-1} \boldsymbol{l} &= 0 \end{aligned}$$

donde por su simetría $C^{-T} = C^{-1}$.

$\boldsymbol{l}^T C^{-1} \boldsymbol{l} = 0$ se llama cónica de rectas.

Definición

Una proyectividad es un mapa invertible h de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{P}^2$ si y sólo si a un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_1, -, \boldsymbol{x}_n\}$ pertenecientes a una recta los lleva a otro conjunto $\{h(\boldsymbol{x}_1), -, h(\boldsymbol{x}_n)\}$ pertenecientes también a una recta.

es decir mapea rectas en rectas.

- Proyectividad, transformación proyectiva, homografía, colinealidad, son sinónimos.
- Las homografías forman un grupo, ya que su inversa también es una homografía, como también la composición de homografías es otra homografía.

Transformaciones proyectivas

En términos algebraicos

Definición

Un mapa lineal $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es una proyectividad si y sólo si existe una matriz H 3×3 invertible tal que

$$h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$$

Prueba 1: Sean $\boldsymbol{x}_i, i = 1, -, n$ puntos en $\boldsymbol{l}$ tal que $\boldsymbol{l}^T\boldsymbol{x}_i = 0$. Sea H una matriz 3×3 invertible, se verifica que

$$\boldsymbol{l}^T H^{-1} H\boldsymbol{x}_i = (H^{-T}\boldsymbol{l})^T H\boldsymbol{x}_i = 0$$

todos los puntos $H\boldsymbol{x}_i$ pertenecen a la recta $\boldsymbol{l}' = H^{-T}\boldsymbol{l}$.

Transformaciones proyectivas

Puntos

Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}'$ mediante

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica H por cualquier escalar distinto de cero, H está definida hasta un factor de escala.
- Por lo tanto H tiene 8 DOF.
- H es una matriz homogenea.

Transformación de rectas

De la prueba dada en la definición de homografía

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l}^T H^{-1} H \boldsymbol{x} = (H^{-T} \boldsymbol{l})^T H \boldsymbol{x} = 0 \\ (\boldsymbol{l}')^T \boldsymbol{x}' = 0 \end{aligned}$$

y la recta $\boldsymbol{l}$ es mapeada a $\boldsymbol{l}' = H^{-T} \boldsymbol{l}$.

Transformación de cónicas

Un punto en una cónica satisface $\boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{x} = 0$, de la transformación $\boldsymbol{x} = H^{-1}\boldsymbol{x}'$, luego

$$\begin{aligned} (H^{-1}\boldsymbol{x}')^T C (H^{-1}\boldsymbol{x}') &= 0 \\ \boldsymbol{x}'^T H^{-T} C H^{-1} \boldsymbol{x}' &= 0 \\ \boldsymbol{x}'^T C' \boldsymbol{x}' &= 0 \end{aligned}$$

con $C' = H^{-T} C H^{-1}$.

Isometría

Una isometría es una transformación que preserva distancia Euclidea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon\sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon = \pm 1$.

Si $\varepsilon = 1$, se llama transformación Euclidea, que ademas

- preserva orientación
- transformación del cuerpo rígido.

Jerarquía de transformaciones

Isometría

Transformación Euclidea

$$\boldsymbol{x}' = H_E \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

con R una matriz de rotación de 2×2 ($RR^T = R^T R = I$), $\mathbf{0}^T = (0, 0)^T$ y $\boldsymbol{t}$ un vector de traslación.

- H_E tiene 3 DOF, uno de la rotación y dos de la traslación.

Invariantes

Cantidades que se preservan en una transformación. Longitudes, ángulos y áreas son invariantes de H_E.

Jerarquía de transformaciones

Similaridad

Similaridad

Una similaridad es una isometría con escalado isotrópico.

$$\boldsymbol{x}' = H_S \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} sR & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

- H_S tiene 4 DOF, uno de la rotación, dos de la traslación y el escalado s.
- Esta transformación queda definida mediante un par de puntos correspondientes $\boldsymbol{x}' \to \boldsymbol{x}$.

Invariantes

Ángulos entre rectas, paralelismo, relación entre áreas son invariantes de H_S.

Transformación afín

Es una transformación no singular (invertible) seguida de una traslación

$$\boldsymbol{x}' = H_A \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

con A una matriz no singular.

- H_A tiene 6 DOF y puede ser recuperada con 3 puntos correspondientes $\boldsymbol{x}' \rightarrow \boldsymbol{x}$.

Jerarquía de transformaciones

Transformación afín

Que hace A?

Descomposición SVD

Puede verse mas claramente la acción de A a partir de su descomposición SVD

$$A = UDV = (UV)V^T DV$$

$$A = R(\theta)R(-\varphi)DR(\varphi); \quad \text{con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

λ_1 y λ_2 son los valores singulares de A.

- Si $\det A > 0$, la transformación preserva dirección.
- El escalado es no isotrópico pero actúa en direcciones otrogonales.

Jerarquía de transformaciones

Transformación afín

Invariantes

Paralelismo: Dos rectas paralelas intersectan a $\boldsymbol{l}_\infty$ en el punto $[x_1, x_2, 0]^T$, luego de la transformación

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = [x_1', x_2', 0]$$

Razón entre longitudes de segmentos paralelos: El escalado es común a rectas de igual dirección.
Razón entre áreas: Las áreas son todas escaladas una cantidad $\lambda_1 \lambda_2$.

Transformación proyectiva

Es una transformación general invertible de forma

$$\boldsymbol{x}' = H_P \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{v}^T & v \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

con $\boldsymbol{v}^T = [v_1, v_2]$ y v un escalar.

- H_P tiene 8 DOF (los 9 elementos menos la escala) y puede computarse con 4 puntos correspondientes (3 deben ser no colineales).
- Mapea puntos ideales en puntos finitos

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{v}^T & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 \end{bmatrix}$$

Jerarquía de transformaciones

Transformación proyectiva

Descomposición

Cualquier H puede obtenerse componiendo las transformaciones anteriores

$$H = H_P H_A H_S$$

donde H_S tiene 4 DOF, H_A tiene 2 DOF mas y H_P 2 DOF mas, para hacer un total de 8 DOF.

Conociendo donde fue mapeado algún invariante del espacio anterior, pueden recuperarse las propiedades correspondientes.

Jerarquía de transformaciones

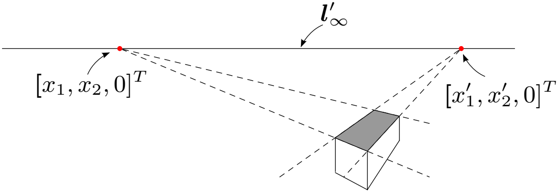
Transformación proyectiva

Ejemplo: conociendo donde fue mapeada $\boldsymbol{l}_\infty$ (dos DOF) luego de una transformación proyectiva, se pueden recuperar las propiedades afín.

Sea $\boldsymbol{l}'_\infty = [l_1, l_2, l_3]^T$ la imágen de $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$. Luego

$$H_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}^T$$

lleva $\boldsymbol{l}'_\infty \rightarrow \boldsymbol{l}_\infty$, aplicada a todos los puntos se realiza una "rectificación afín"

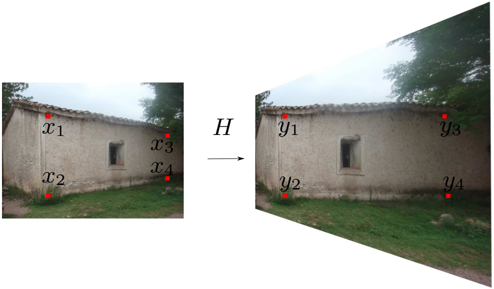


Estimación de H

Estimación sin ruido

Si se conocen 4 pares de puntos correspondientes, la rectificación puede ser completa (8 DOF).

Ejemplo:



H mapea $\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_1 = [35, 80, 1]^T \\ \boldsymbol{x}_2 = [35, 16, 1]^T \\ \boldsymbol{x}_3 = [131, 65, 1]^T \\ \boldsymbol{x}_4 = [131, 30, 1]^T \end{array}$ en $\begin{array}{l} \boldsymbol{y}_1 = [35, 80, 1]^T \\ \boldsymbol{y}_2 = [35, 16, 1]^T \\ \boldsymbol{y}_3 = [153, 80, 1]^T \\ \boldsymbol{y}_4 = [153, 16, 1]^T \end{array}$ es decir $\boldsymbol{y}_i = H\boldsymbol{x}_i$

Estimación de H

Estimación sin ruido

En forma explicita

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y'_1 = \frac{y_1}{y_3} = \frac{h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}x_3}{h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3} \\ \\ y'_2 = \frac{y_2}{y_3} = \frac{h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{23}x_3}{h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3} \end{array}$$

y cada punto genera dos ecuaciones

$$\begin{aligned} y'_1(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3) &= h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}x_3 \\ y'_2(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3) &= h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{23}x_3 \end{aligned}$$

Usando notación matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & -x_1y'_1 & -x_2y'_1 & -x_2y'_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & -x_1y'_2 & -x_2y'_2 & -x_2y'_2 \end{bmatrix} [\boldsymbol{h}] = 0$$

Estimación de H

Estimación sin ruido

Resolviendo en GNU/Octave

```
x1= [35;   80;  1];      y1=[35;   80;  1];
x2= [35;   16;  1];      y2=[35;   16;  1];
x3= [131;  65;  1];      y3=[153;  80;  1];
x4= [131;  30;  1];      y4=[153;  16;  1];

A  =[x1'         zeros(1,3)  -x1'*y1(1);
     zeros(1,3)  x1'         -x1'*y1(2);
     x2'         zeros(1,3)  -x2'*y2(1);
     zeros(1,3)  x2'         -x2'*y2(2);
     x3'         zeros(1,3)  -x3'*y3(1);
     zeros(1,3)  x3'         -x3'*y3(2);
     x4'         zeros(1,3)  -x4'*y4(1);
     zeros(1,3)  x4'         -x4'*y4(2);  ];

h=null(A);
```

Resulta:

$$H = \begin{bmatrix} 0{,}43512 & 0{,}00000 & 14{,}80863 \\ -0{,}18997 & 0{,}85822 & 6{,}64897 \\ -0{,}00405 & 0{,}00000 & 1{,}00000 \end{bmatrix}$$

Estimación de H

Estimación con ruido - Algorítmo DLT

Sean $x_i' \rightarrow x_i$ un conjunto de correspondencia con ruido Gaussiano,

- No existe una transformación exacta, se busca la que mejor aprixima minimizando algún funcional de costo.
- Generalmente se usan mas de 4 puntos correspondientes, el sistema $\boldsymbol{x}_i' = H\boldsymbol{x}_i$ queda sobredeterminado.

Algorítmo DLT

$\boldsymbol{x}'$ y $H\boldsymbol{x}$ son vectores con la misma dirección, por ende

$$\boldsymbol{x}' \times H\boldsymbol{x} = 0$$

explicitamente

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}1^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{h}2^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{h}3^T\boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2'\boldsymbol{h}_3^T\boldsymbol{x} - x_3'\boldsymbol{h}_2^T\boldsymbol{x} \\ x_3'\boldsymbol{h}_1^T\boldsymbol{x} - x_1'\boldsymbol{h}_3^T\boldsymbol{x} \\ x_1'\boldsymbol{h}_2^T\boldsymbol{x} - x_2'\boldsymbol{h}_1^T\boldsymbol{x} \end{bmatrix} = 0$$

donde $\boldsymbol{h}i^T$ son los vectores fila de H.

Algorítmo DLT, continuación

Cambiando $\boldsymbol{h}i^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{h}i$ y completando

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -x_3'\boldsymbol{x}^T & x_2'\boldsymbol{x}^T \\ x_3'\boldsymbol{x}^T & \mathbf{0}^T & -x_1'\boldsymbol{x}^T \\ -x_2'\boldsymbol{x}^T & x_1'\boldsymbol{x}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}1 \\ \boldsymbol{h}2 \\ \boldsymbol{h}3 \end{bmatrix} = \tilde{A}\boldsymbol{h} = 0$$

con $\tilde{A}$ una matriz 3×9 obtenida de cada correspondencia.
La matriz $\tilde{A}$ es de rango 2, sólo dos de sus filas son útiles para el computo de H, generalmente se usan las dos primeras.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -x_3'\boldsymbol{x}^T & x_2'\boldsymbol{x}^T \\ x_3'\boldsymbol{x}^T & \mathbf{0}^T & -x_1'\boldsymbol{x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}1 \\ \boldsymbol{h}2 \\ \boldsymbol{h}3 \end{bmatrix} = \hat{A}\boldsymbol{h} = 0$$

con $\hat{A}$ una matriz de 2×9

Estimación de H

Algorítmo DLT

Algorítmo DLT, continuación

Finalmente, considerando n pares de correspondencias se llega al sistema sobredeterminado que se desea resolver

$$A\boldsymbol{h} = \varepsilon \tag{1}$$

con A una matriz de $2n \times 9$

- Si los puntos correspondientes son exactos, ε en (1) será nulo, sino se busca $\boldsymbol{h}$ que mejor aproxima a 0.
- Minimizar (1) usando mínimos cuadrados: encontrar $\boldsymbol{h}$ que minimice $||A\boldsymbol{h}||$ sujeto a $||\boldsymbol{h}|| = 1$.

Mínimos cuadrados usando SVD

Sea $A = UDV^T$ se debe minimizar $||UDV^T\boldsymbol{h}||$. Como U y V^T preservan norma

$$||UDV^T\boldsymbol{h}|| = ||DV^T\boldsymbol{h}||$$

y

$$||\boldsymbol{h}|| = ||V^T\boldsymbol{h}|| = 1$$

definiendo $\boldsymbol{k} = V^T\boldsymbol{h}$, el problema es ahora minimizar $||D\boldsymbol{k}||$ sujeto a $||\boldsymbol{k}|| = 1$

Luego, como D es una matriz diagonal (con sus elementos ordenados de mayor a menor), la solución será $\boldsymbol{k} = [0, 0, -, 1]^T$. Finalmente,

$$\boldsymbol{h} = V\boldsymbol{k}$$

es la última columna de V, el vector singular correspondiente al menor valor singular de A.

Estimación de H

Distancia algebraica

El algorítmo DLT minimiza distancia algebraica

$$d_{alg}(x'_i, Hx_i)^2 = ||\varepsilon|| = ||A\boldsymbol{h}||$$

Tiene las ventajas

- es lineal
- tiene solución única
- es barato

pero

- se minimiza un parámetro que no siempre tiene sentido geométrico o estadístico.

Generalmente se usa para inicializar otros métodos de minimización no lineales.

Estimación de H

Distancia geométrica

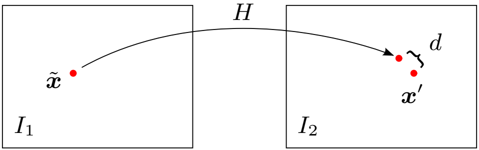
Se basa en la distancia Euclidea $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ entre puntos medidos y proyectados.

Error de transferencia

Supone ruido en una sola de las imágenes

$$\sum_i d(\boldsymbol{x}_i', H\tilde{\boldsymbol{x}}_i)^2$$

con $\tilde{\boldsymbol{x}}$ el punto medido sin ruido sobre la imagen 1.



Estimación de H

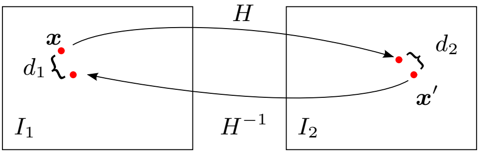
Distancia geométrica

Error de transferencia simétrico

Asume ruido en ambas imágenes

$$\sum_i d_1(\boldsymbol{x}_i, H^{-1}\boldsymbol{x}'_i)^2 + \sum_i d_2(\boldsymbol{x}'_i, H\boldsymbol{x}_i)^2$$

es la suma el error de transferencia en las dos imágenes.



Estimación de H

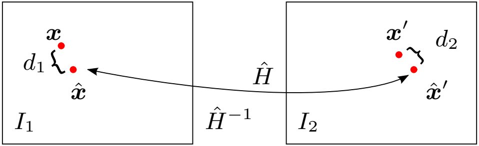
Distancia geométrica

Error de reproyección

Asume ruido en ambas imágenes

$$\sum_i d_1(\boldsymbol{x}_i, \hat{\boldsymbol{x}}'_i)^2 + \sum_i d_2(\boldsymbol{x}'_i, \hat{\boldsymbol{x}}_i)^2$$

es la distancia a un punto intermedio $\hat{\boldsymbol{x}}'_i = \hat{H}\hat{\boldsymbol{x}}_i$.



Concepto

Todo punto con un error mayor al que se espera por ruido es “outlier”.

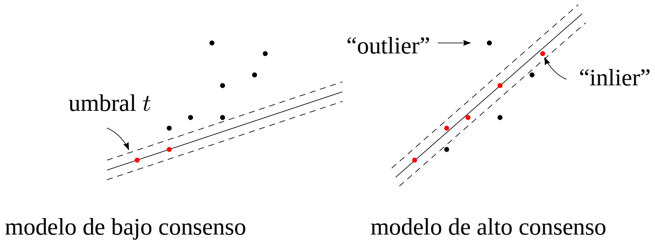
Proceso

- Elegir al azar un conjunto mínimo de datos que describen el modelo.
- Contar cuantos de los puntos restantes “consensúan” con este modelo (umbral t). Estos puntos son “inliers”.
- Si se encuentran un número suficiente de puntos que consensúan (umbral T) se reestima el modelo con todos los “inliers” y se termina.
- Sino se elige otro conjunto y se vuelve a repetir lo anterior.
- Luego de una cantidad N (umbral) de pruebas se elige el modelo con mas consenso y se reestima con todos los “inliers”

Estimación robusta

RANSAC

Ejemplo de RANSAC para una recta



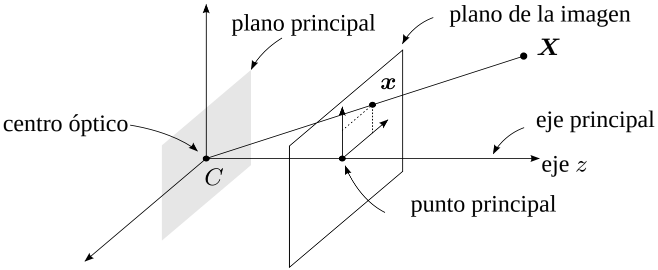
Umbrales

t: depende del nivel de ruido que se espera en los datos
T: depende del porcentaje de inliers que se espera en los datos
N: depende del porcentaje de outliers que se espera en los datos

Modelo de cámara

Modelo “pinhole”

Proyección central de puntos del espacio en el plano de la imagen, mapa:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.



- El plano de la imagen esta en $z = f$, la distancia focal.
- Por triángulos semejantes se cumple $\frac{x}{f} = \frac{X}{Z}$ y $\frac{y}{f} = \frac{Y}{Z}$.
- En coord. homogeneas $\boldsymbol{X} = [X, Y, Z, 1]^T$ y $\boldsymbol{x} = [fX, fY, Z]^T$.

Modelo de cámara

Ecuaciones del modelo “pinhole”

Representación matricial del mapeo

Sea $\boldsymbol{X}$ un punto en el espacio, su proyección es

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & & & 0 \\ & f & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$$

con P una matriz de proyección de 3×4 llamada *matriz de la cámara*

Offset en el *punto principal*

La proyección central será $[X, Y, Z]^T \to [f\frac{X}{Z} + c_x, f\frac{Y}{Z} + c_y]$, luego

$$P = \begin{bmatrix} f & & c_x & 0 \\ & f & c_y & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} = K[I|\mathbf{0}]$$

donde K es la matriz de calibración de la cámara (sin distorsión).

Modelo de cámara

Ecuaciones del modelo “pinhole”

Rotación y traslación de la cámara

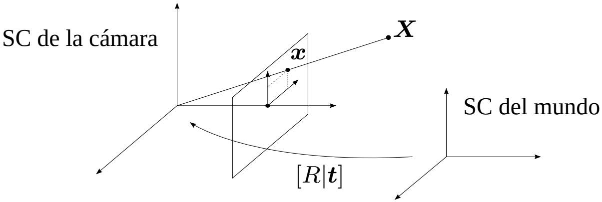
Si el sistema de coordenadas del mundo no coincide con el de la cámara

$$\boldsymbol{X}_{cam} = [R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X}$$

la proyección será

$$\boldsymbol{x} = K[I|\mathbf{0}]\boldsymbol{X}_{cam} = K[R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X} = P\boldsymbol{X}$$

con $P = K[R|\boldsymbol{t}]$.



Modelo de cámara

Ecuaciones del modelo “pinhole”

Sistema de coordenadas en píxeles

Mediante un escalado se pasa al sistema de píxeles

$$\boldsymbol{x}_p = [u, v, 1]^T = m\boldsymbol{x}$$

con $m = \frac{pixel}{m}$. Si los píxeles no son cuadrados se escala diferente en x e y

$$u = f\frac{X}{Z}m_x + c_x m_x; \quad v = f\frac{Y}{Z}m_y + c_y m_y$$

esto modifica la matriz de calibración K quedando

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X} = K[R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X}$$

con $\alpha_x = fm_x$, $\alpha_y = fm_y$ en unidades de píxeles, y $x_0 = c_x m_x$ y $y_0 = c_y m_y$ el punto principal en el sistema de píxeles.

Modelo de cámara

Ecuaciones del modelo “pinhole”

Ejes de la cámara no perpendiculares

Finalmente se considera la posibilidad que los ejes físicos del CCD no sean perpendiculares, agregando el escalar s en la matriz de calibración K

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X} = K[R|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{X} = P\boldsymbol{X}$$

Práctico

1. Dadas las proyecciones de los puntos correspondientes a los vértices de un rectángulo

$$\{x_1 = (35, 80), x_2 = (35, 16), x_3 = (131, 65), x_4 = (131, 30)\}$$

   determinar la proyección de las rectas que unen los pares de puntos (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_4) y (x_3, x_4).
2. Encontrar la transformación H_P que recupera las propiedades afín.
3. Transformar el conjunto de puntos y rectas, verificar la recuperación del paralelismo.
4. Calcular la intersección de las rectas transformadas con la recta l_∞.
5. Encontrar la transformación que lleve el conjunto de puntos a otro conjunto

$$\{y_1 = (35, 80), y_2 = (35, 16), y_3 = (153, 80), y_4 = (153, 16)\}$$