Filtro de Kalman

Guillermo Steiner

Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería
Universidad Tecnológica Nacional, F.R.C.
http://ciii.frc.utn.edu.ar
Córdoba, Argentina

Noviembre 2011

Introducción

El filtro de Kalman es un filtro óptimo recursivo, utilizado para estimar el estado de un sistema dinámico de dos formas distintas.

Fusión

Combinando una serie de sensores con distintos errores.

Estimador

Combinando un sensor con la estimación inexacta del sistema.

Introducción

El filtro de Kalman es un filtro óptimo recursivo, utilizado para estimar el estado de un sistema dinámico de dos formas distintas.

Fusión

Combinando una serie de sensores con distintos errores.

Estimador

Combinando un sensor con la estimación inexacta del sistema.

Introducción

El filtro de Kalman es un filtro óptimo recursivo, utilizado para estimar el estado de un sistema dinámico de dos formas distintas.

Fusión

Combinando una serie de sensores con distintos errores.

Estimador

Combinando un sensor con la estimación inexacta del sistema.

Estimador Óptimo

Distintos Puntos de vista

Incorpora toda la información disponible que se tiene de un proceso

1. El conocimiento del modelo que se posee
2. La descripción estadística de los errores del sistema, el ruido en la medición y la incertidumbre en los modelos de la dinámica.
3. Las condiciones iniciales del sistema.

Minimiza el error cuadrático medio.

Estimador Óptimo

Distintos Puntos de vista

Incorpora toda la información disponible que se tiene de un proceso

1. El conocimiento del modelo que se posee
2. La descripción estadística de los errores del sistema, el ruido en la medición y la incertidumbre en los modelos de la dinámica.
3. Las condiciones iniciales del sistema.

Minimiza el error cuadrático medio.

Estimador Óptimo

Distintos Puntos de vista

Incorpora toda la información disponible que se tiene de un proceso

1. El conocimiento del modelo que se posee
2. La descripción estadística de los errores del sistema, el ruido en la medición y la incertidumbre en los modelos de la dinámica.
3. Las condiciones iniciales del sistema.

Minimiza el error cuadrático medio.

Filtro Recursivo

El filtro es un bucle que por cada vuelta

1. Predice con el modelo lineal.
2. Corrige con la lectura del sensor.

Ventaja

No requiere de todos los datos previos, irá calculando los resultados en base a los valores anteriores, esto permite que su utilización sea viable.

Filtro Recursivo

El filtro es un bucle que por cada vuelta

1. Predice con el modelo lineal.
2. Corrige con la lectura del sensor.

Ventaja

No requiere de todos los datos previos, irá calculando los resultados en base a los valores anteriores, esto permite que su utilización sea viable.

Filtro Recursivo

El filtro es un bucle que por cada vuelta

1. Predice con el modelo lineal.
2. Corrige con la lectura del sensor.

Ventaja

No requiere de todos los datos previos, irá calculando los resultados en base a los valores anteriores, esto permite que su utilización sea viable.

Introducción

Si disponemos de una serie de medidas tomadas de un sistema $x_1, x_2, ..., x_n$, se puede definir que:

- Un predictor calcula el mejor valor de x_{n+1}.
- Un suavizador calcula el mejor valor de un punto x_i teniendo en cuenta los valores antes y después de i.
- Finalmente un filtro calcula el mejor valor de x_{n+1} teniendo en cuenta los valores previos y una medida inexacta del valor actual.

Media

Dada una serie de valores del tipo $x_1, x_2, ..., x_n$, la media muestral de n valores será:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i \tag{1}$$

Para un nuevo elemento de esa serie su media será

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n+1} x_i = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i + \frac{1}{n} x_{n+1} \right) \tag{2}$$

Operando

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1} \overline{x}_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1} = \overline{x}_n + K \left(x_{n+1} - \overline{x}_n \right) \tag{3}$$

Media

Dada una serie de valores del tipo $x_1, x_2, ..., x_n$, la media muestral de n valores será:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i \tag{1}$$

Para un nuevo elemento de esa serie su media será

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n+1} x_i = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i + \frac{1}{n} x_{n+1} \right) \tag{2}$$

Operando

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1} \overline{x}_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1} = \overline{x}_n + K \left(x_{n+1} - \overline{x}_n \right) \tag{3}$$

Media

Dada una serie de valores del tipo $x_1, x_2, ..., x_n$, la media muestral de n valores será:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i \tag{1}$$

Para un nuevo elemento de esa serie su media será

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{1}^{n+1} x_i = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i + \frac{1}{n}x_{n+1}\right) \tag{2}$$

Operando

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1}\overline{x}_n + \frac{1}{n+1}x_{n+1} = \overline{x}_n + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right) \tag{3}$$

Media

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1}\overline{x}_n + \frac{1}{n+1}x_{n+1} = \overline{x}_n + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right) \tag{4}$$

Donde $K = 1/\left(n+1\right)$ es un factor de ganancia.

- El nuevo valor del promedio finalmente queda como una suma ponderada del promedio anterior y la lectura actual.
- Se observa que $K < 1$ y el aporte a la suma de $\overline{x}_n$ será mayor que x_{n+1}.
- Se cree mas en el valor del promedio anterior que en la toma actual.

Media

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1}\overline{x}_n + \frac{1}{n+1}x_{n+1} = \overline{x}_n + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right) \quad (4)$$

Donde $K = 1/\left(n+1\right)$ es un factor de ganancia.

- El nuevo valor del promedio finalmente queda como una suma ponderada del promedio anterior y la lectura actual.
- Se observa que $K < 1$ y el aporte a la suma de $\overline{x}_n$ será mayor que x_{n+1}.
- Se cree mas en el valor del promedio anterior que en la toma actual.

Media

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1}\overline{x}_n + \frac{1}{n+1}x_{n+1} = \overline{x}_n + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right) \tag{4}$$

Donde $K = 1/\left(n+1\right)$ es un factor de ganancia.

- El nuevo valor del promedio finalmente queda como una suma ponderada del promedio anterior y la lectura actual.
- Se observa que $K < 1$ y el aporte a la suma de $\overline{x}_n$ será mayor que x_{n+1}.
- Se cree mas en el valor del promedio anterior que en la toma actual.

Varianza

De la misma forma que el promedio, podemos calcular la desviación estándar cuadrática (varianza) por este método.

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n \left(x_i - \overline{x}_n\right)^2 \tag{5}$$

y la varianza para un nuevo punto

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^2 &= \frac{1}{n+1} \sum_1^{n+1} \left(x_i - \overline{x}_{n+1}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_1^{n+1} \left(x_i - \overline{x}_n - K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_1^{n+1} \Big(\left(x_i - \overline{x}_n\right)^2 - 2K\left(x_i - \overline{x}_n\right)\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right) + \\
&\quad + K^2\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)^2\Big)
\end{aligned}$$

Varianza

Se extrae los elementos constantes y se separa el resto en dos sumatorias

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{n+1} \quad = \quad & \frac{1}{n+1}\left[\sum_{1}^{n+1}\left(x_i-\overline{x}_n\right)^2 - \right. \\
& \left. -2K\sum_{1}^{n+1}\left(x_i-\overline{x}_n\right)\left(x_{n+1}-\overline{x}_n\right)+(n+1)K^2\left(x_{n+1}-\overline{x}_n\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Varianza

Luego se evalúa la sumatoria hasta n y se extrae el último termino de $n+1$

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^2 &= \frac{1}{n+1}\left[\sum_1^n (x_i-\overline{x}_n)^2 - 2K\sum_1^n (x_i-\overline{x}_n)(x_{n+1}-\overline{x}_n) + \right.\\ &\left. +nK^2(x_{n+1}-\overline{x}_n)^2 + (1+K^2)(x_{n+1}-\overline{x}_n)^2 - 2K(x_{n+1}-\overline{x}_n)^2\right]\\ &= \frac{1}{n+1}\left[\sum_1^n (x_i-\overline{x}_n)^2 - 2K\sum_1^n (x_i-\overline{x}_n)(x_{n+1}-\overline{x}_n) + \right.\\ &\left. +nK^2(x_{n+1}-\overline{x}_n)^2 + (1-K)^2(x_{n+1}-\overline{x}_n)^2\right]\end{aligned}$$

Luego la segunda sumatoria es cero debido a que $\sum_1^n (x_i-\overline{x}_n)=0$, entonces

Varianza

$$\sigma^2_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_1^n \left(x_i - \overline{x}_n\right)^2 + nK^2\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)^2 + (1-K)^2(x_{n+1} - \overline{x}_n)^2\right] \tag{6}$$

Reemplazamos a $\sigma^2_n = \frac{1}{n}\sum_1^n \left(x_i - \overline{x}_n\right)^2$ y $nK = nK^2 + (1-K)^2$ y se opera

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\left[n\sigma^2_n + \left(nK^2 + (1-K)^2\right)\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[n\sigma^2_n + nK\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)^2\right] \\
&= (1-K)\left[\sigma^2_n + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Final

De esta forma se puede calcular el promedio y la varianza de una serie por un método iterativo donde:

1. Dado un punto nuevo x_{n+1}calculamos el factor de ganancia $K = \frac{1}{n+1}$
2. Se computa la nueva estimación del valor medio
$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)$$
3. Se calcula la estimación previa de la varianza
$$\sigma_n'^2 = \sigma_n^2 + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)^2$$
4. Se calcula el valor final de la varianza usando la corrección
$$\sigma_{n+1}^2 = (1-K)\sigma_n'^2$$

Final

De esta forma se puede calcular el promedio y la varianza de una serie por un método iterativo donde:

1. Dado un punto nuevo x_{n+1}calculamos el factor de ganancia $K = \frac{1}{n+1}$
2. Se computa la nueva estimación del valor medio

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)$$

3. Se calcula la estimación previa de la varianza

$$\sigma_n^{\prime 2} = \sigma_n^2 + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)^2$$

4. Se calcula el valor final de la varianza usando la corrección

$$\sigma_{n+1}^2 = (1-K)\sigma_n^{\prime 2}$$

Final

De esta forma se puede calcular el promedio y la varianza de una serie por un método iterativo donde:

1. Dado un punto nuevo x_{n+1}calculamos el factor de ganancia $K = \frac{1}{n+1}$
2. Se computa la nueva estimación del valor medio

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)$$

3. Se calcula la estimación previa de la varianza

$$\sigma_n^{'2} = \sigma_n^2 + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)^2$$

4. Se calcula el valor final de la varianza usando la corrección

$$\sigma_{n+1}^2 = (1 - K)\sigma_n^{'2}$$

Final

De esta forma se puede calcular el promedio y la varianza de una serie por un método iterativo donde:

1. Dado un punto nuevo x_{n+1}calculamos el factor de ganancia $K = \frac{1}{n+1}$
2. Se computa la nueva estimación del valor medio

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)$$

3. Se calcula la estimación previa de la varianza

$$\sigma_n^{'2} = \sigma_n^2 + K\left(x_{n+1} - \overline{x}_n\right)^2$$

4. Se calcula el valor final de la varianza usando la corrección

$$\sigma_{n+1}^2 = (1 - K)\sigma_n^{'2}$$

Filtro de Kalman en una dimensión

Se posee dos instrumentos para medir una cantidad de interés x, con salida x_1 para el primer dispositivo y salida x_2 para el segundo.

Cada instrumento posee un error en la medición con distribución normal de media cero y desviación estándar $\sigma_1 y \sigma_2$ respectivamente.

El problema es entonces encontrar cual es la mejor forma de combinar ambas medidas para determinar la mejor estimación de x

Filtro de Kalman en una dimensión

Se posee dos instrumentos para medir una cantidad de interés x, con salida x_1 para el primer dispositivo y salida x_2 para el segundo.

Cada instrumento posee un error en la medición con distribución normal de media cero y desviación estándar $\sigma_1 y \sigma_2$ respectivamente.

El problema es entonces encontrar cual es la mejor forma de combinar ambas medidas para determinar la mejor estimación de x

Filtro de Kalman en una dimensión

Se posee dos instrumentos para medir una cantidad de interés x, con salida x_1 para el primer dispositivo y salida x_2 para el segundo.

Cada instrumento posee un error en la medición con distribución normal de media cero y desviación estándar $\sigma_1 y \sigma_2$ respectivamente.

El problema es entonces encontrar cual es la mejor forma de combinar ambas medidas para determinar la mejor estimación de x

Relación de las desviaciones estándar

Se podría considerar 3 opciones:

- Ambas desviaciones de los instrumentos son iguales $\sigma_1 = \sigma_2$, en este caso la opción es promediar ambos resultados.
- Uno de los instrumentos posee una desviación estándar mucho menor que el otro $\sigma_1 \ll \sigma_2$ o $\sigma_1 \gg \sigma_2$, en este caso la mejor opción es tomar el valor del instrumento que posea menor error y descartar el otro.
- Ninguno de los instrumento posee un error significativamente menor que el otro pero tampoco son iguales, este caso es mas complicado, no se pueden promediar ni eliminar uno de los instrumentos, la opción es utilizar una promedio ponderado y la elección del peso será lo que se discutirá en este texto.

Relación de las desviaciones estándar

Se podría considerar 3 opciones:

- Ambas desviaciones de los instrumentos son iguales $\sigma_1 = \sigma_2$, en este caso la opción es promediar ambos resultados.
- Uno de los instrumentos posee una desviación estándar mucho menor que el otro $\sigma_1 \ll \sigma_2$ o $\sigma_1 \gg \sigma_2$, en este caso la mejor opción es tomar el valor del instrumento que posea menor error y descartar el otro.
- Ninguno de los instrumento posee un error significativamente menor que el otro pero tampoco son iguales, este caso es mas complicado, no se pueden promediar ni eliminar uno de los instrumentos, la opción es utilizar una promedio ponderado y la elección del peso será lo que se discutirá en este texto.

Relación de las desviaciones estándar

Se podría considerar 3 opciones:

- Ambas desviaciones de los instrumentos son iguales $\sigma_1 = \sigma_2$, en este caso la opción es promediar ambos resultados.
- Uno de los instrumentos posee una desviación estándar mucho menor que el otro $\sigma_1 \ll \sigma_2$ o $\sigma_1 \gg \sigma_2$, en este caso la mejor opción es tomar el valor del instrumento que posea menor error y descartar el otro.
- Ninguno de los instrumento posee un error significativamente menor que el otro pero tampoco son iguales, este caso es mas complicado, no se pueden promediar ni eliminar uno de los instrumentos, la opción es utilizar una promedio ponderado y la elección del peso será lo que se discutirá en este texto.

Relación de las desviaciones estándar

Se podría considerar 3 opciones:

- Ambas desviaciones de los instrumentos son iguales $\sigma_1 = \sigma_2$, en este caso la opción es promediar ambos resultados.
- Uno de los instrumentos posee una desviación estándar mucho menor que el otro $\sigma_1 \ll \sigma_2$ o $\sigma_1 \gg \sigma_2$, en este caso la mejor opción es tomar el valor del instrumento que posea menor error y descartar el otro.
- Ninguno de los instrumento posee un error significativamente menor que el otro pero tampoco son iguales, este caso es mas complicado, no se pueden promediar ni eliminar uno de los instrumentos, la opción es utilizar una promedio ponderado y la elección del peso será lo que se discutirá en este texto.

Propuesta

Estimar el promedio de acuerdo a la desviación estándar.

$$\hat{x} = \frac{\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{x_1\sigma_2^2 + x_2\sigma_1^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} \tag{7}$$

Donde $\hat{x}$ es la estimación del valor y además cumple con:

- Para $\sigma_1 = \sigma_2$ tenemos $\hat{x} \simeq \frac{x_1+x_2}{2}$
- Para $\sigma_1 \ll \sigma_2$ tenemos $\hat{x} \simeq \frac{x_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2} = x_1$

Se puede expresar

$$\hat{x} = x_1 + K(x_2 - x_1) \tag{8}$$

Donde $K = \sigma_1^2 / \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

Propuesta

Estimar el promedio de acuerdo a la desviación estándar.

$$\hat{x} = \frac{\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{x_1\sigma_2^2 + x_2\sigma_1^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} \tag{7}$$

Donde $\hat{x}$ es la estimación del valor y además cumple con:

- Para $\sigma_1 = \sigma_2$ tenemos $\hat{x} \simeq \frac{x_1+x_2}{2}$
- Para $\sigma_1 \ll \sigma_2$ tenemos $\hat{x} \simeq \frac{x_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2} = x_1$

Se puede expresar

$$\hat{x} = x_1 + K(x_2 - x_1) \tag{8}$$

Donde $K = \sigma_1^2 / \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

Propuesta

Estimar el promedio de acuerdo a la desviación estándar.

$$\hat{x} = \frac{\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{x_1\sigma_2^2 + x_2\sigma_1^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} \tag{7}$$

Donde $\hat{x}$ es la estimación del valor y además cumple con:

- Para $\sigma_1 = \sigma_2$ tenemos $\hat{x} \simeq \frac{x_1+x_2}{2}$
- Para $\sigma_1 \ll \sigma_2$ tenemos $\hat{x} \simeq \frac{x_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2} = x_1$

Se puede expresar

$$\hat{x} = x_1 + K(x_2 - x_1) \tag{8}$$

Donde $K = \sigma_1^2 / \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

Comprobación

Escribiendo la ecuación de probabilidad de cada uno de los instrumentos

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x-x_1)^2/2\sigma_1^2} \tag{9}$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-(x-x_2)^2/2\sigma_2^2} \tag{10}$$

Si consideramos que las dos medidas son independientes

$$p(x) = p_1(x)p_2(x) = Ce^{-(x-x_1)^2/2\sigma_1^2-(x-x_2)^2/2\sigma_2^2} \tag{11}$$

Comprobación

Escribiendo la ecuación de probabilidad de cada uno de los instrumentos

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x-x_1)^2/2\sigma_1^2} \tag{9}$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-(x-x_2)^2/2\sigma_2^2} \tag{10}$$

Si consideramos que las dos medidas son independientes

$$p(x) = p_1(x)p_2(x) = Ce^{-(x-x_1)^2/2\sigma_1^2-(x-x_2)^2/2\sigma_2^2} \tag{11}$$

Producto de dos gaussianas

$$
\begin{aligned}
p(x) &= C\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2xx_1}{\sigma_1^2}+\frac{x_1^2}{\sigma_1^2}\right)+\left(\frac{x^2}{\sigma_2^2}-\frac{2xx_2}{\sigma_2^2}+\frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right)\right)\\
&= C\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)-2x\left(\frac{x_1}{\sigma_1^2}+\frac{x_2}{\sigma_2^2}\right)\right)+D\right)\\
&= C\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)-2x\left(\frac{\sigma_2^2x_1+\sigma_1^2x_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\right)+D\right)\\
&= C\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\left(x^2-2x\left(\frac{\sigma_2^2x_1+\sigma_1^2x_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\right)\right)+D\right)
\end{aligned}
$$

Producto de dos gaussianas

En el último termino, se completa cuadrado

$$p(x) = F \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x - \frac{\sigma_2^2 x_1 + \sigma_1^2 x_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\right) \quad (12)$$

De esta ecuación se extrae el valor medio

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2 x_1 + \sigma_1^2 x_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \quad (13)$$

y la varianza de la nueva distribución será

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \quad (14)$$

Producto de dos gaussianas

En el último termino, se completa cuadrado

$$p(x) = F \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x - \frac{\sigma_2^2 x_1 + \sigma_1^2 x_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\right) \tag{12}$$

De esta ecuación se extrae el valor medio

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2 x_1 + \sigma_1^2 x_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \tag{13}$$

y la varianza de la nueva distribución será

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \tag{14}$$

Producto de dos gaussianas

En el último termino, se completa cuadrado

$$p(x) = F \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x-\frac{\sigma_2^2x_1+\sigma_1^2x_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\right) \tag{12}$$

De esta ecuación se extrae el valor medio

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2x_1+\sigma_1^2x_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \tag{13}$$

y la varianza de la nueva distribución será

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \tag{14}$$

Kalman como fusión de sensores

Introduciendo el factor de ganancia $K = \sigma_1^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ resulta

$$\hat{x} = x_1 + K(x_2 - x_1) \tag{15}$$

$$\hat{\sigma}^2 = (1 - K)\sigma_1^2 \tag{16}$$

El resultado final es de la forma del clásico filtro de Kalman

Kalman como estimador

x_1 no necesariamente debe ser la medida de un instrumento, puede ser una estimación del sistema con un error de varianza σ_1^2 y x_2 si será la medida del instrumento con un error de varianza σ_2^2.
El filtro de Kalman entonces combinará la estimación del sistema con la medida del instrumento para devolver la mejor combinación lineal de ambos.

$$\hat{x}_{(t+1)} = \hat{x}_{(t)} + K(x_{(t+1)} - \hat{x}_{(t)}) \tag{17}$$

$$\hat{\sigma}^2_{(t+1)} = (1 - K)\hat{\sigma}^2_{(t)} \tag{18}$$

$$K = \hat{\sigma}^2_{(t)}/(\hat{\sigma}^2_{(t)} + \sigma^2_{(t)}) \tag{19}$$

Kalman multidimensional

Es una generalización del método anterior, donde los sensores proveen mas de una medición, se tendrá 2 vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$(vectores de n dimensiones), cada vector representa los valores obtenidos de un sensor y donde cada una de las medidas tendrá también una varianza asociada, que para el caso de no estar correlacionadas:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

y

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{21}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Ecuaciones

La mejor estimación para el caso multidimensional es

$$\hat{\mathbf{x}} = (\Sigma_2 \mathbf{x}_1 + \Sigma_1 \mathbf{x}_2)(\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} \tag{22}$$

A igual que en el caso unidimensional se agrega la ganancia pero ahora expresada en forma de matriz como $K = \Sigma_1(\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1}$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1 + K(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^{-1} \tag{23}$$

y como estimador de la nueva varianza

$$\hat{\mathbf{\Sigma}} = (I - K)\Sigma_1 \tag{24}$$

Diferentes dimensiones entre estimador y medida

Ocurre cuando las dimensiones del estimador y el de las mediciones no son las mismas, generalmente debido a que no todas las variables estimadas pueden ser sensadas.

Caso mas general y el que comúnmente se observa en los trabajos de Kalman. La solución se reduce simplemente a mover el espacio de estimación a el de sensado.

Partimos entonces de un vector de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ y un vector de medidas $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ Kalman como estimador de estado, se reemplaza el sensor 1 por la estimación de la nueva posición, tenemos entonces

Diferentes dimensiones entre estimador y medida

Ocurre cuando las dimensiones del estimador y el de las mediciones no son las mismas, generalmente debido a que no todas las variables estimadas pueden ser sensadas.

Caso mas general y el que comúnmente se observa en los trabajos de Kalman. La solución se reduce simplemente a mover el espacio de estimación a el de sensado.

Partimos entonces de un vector de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ y un vector de medidas $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ Kalman como estimador de estado, se reemplaza el sensor 1 por la estimación de la nueva posición, tenemos entonces

Diferentes dimensiones entre estimador y medida

Ocurre cuando las dimensiones del estimador y el de las mediciones no son las mismas, generalmente debido a que no todas las variables estimadas pueden ser sensadas.

Caso mas general y el que comúnmente se observa en los trabajos de Kalman. La solución se reduce simplemente a mover el espacio de estimación a el de sensado.

Partimos entonces de un vector de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ y un vector de medidas $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ Kalman como estimador de estado, se reemplaza el sensor 1 por la estimación de la nueva posición, tenemos entonces

Modelo Lineal

Estado

$$\mathbf{x}_{(n+1)} = A\mathbf{x}_{(n)} + B\mathbf{u}_{(n)} + \mathbf{w}_{(n)} \tag{25}$$

La matriz de transición A de $l \times l$ relaciona estado anterior con actual, puede sumarse un vector de entrada $\mathbf{u}_{(n)}$ y un ruido $\mathbf{w}$ de tipo gaussiano con media 0

Medición

$$\mathbf{z}_{(n)} = H\mathbf{x}_{(n)} + \mathbf{v}_{(n)} \tag{26}$$

Donde H es una matriz de $m \times l$ que relaciona el vector de estado con el vector de medición y $\mathbf{v}_{(n)}$ es el error de media 0 y varianza R

Modelo Lineal

Estado

$$\mathbf{x}_{(n+1)} = A\mathbf{x}_{(n)} + B\mathbf{u}_{(n)} + \mathbf{w}_{(n)} \tag{25}$$

La matriz de transición A de $l \times l$ relaciona estado anterior con actual, puede sumarse un vector de entrada $\mathbf{u}_{(n)}$ y un ruido $\mathbf{w}$ de tipo gaussiano con media 0

Medición

$$\mathbf{z}_{(n)} = H\mathbf{x}_{(n)} + \mathbf{v}_{(n)} \tag{26}$$

Donde H es una matriz de $m \times l$ que relaciona el vector de estado con el vector de medición y $\mathbf{v}_{(n)}$ es el error de media 0 y varianza R

Predicción - Covarianza

La matriz de covarianza referida al sistema debe ser estimada al igual que el vector de estado.

$$P^{-}_{(n+1)} = AP_{(n)}A^T + Q \tag{27}$$

Donde $P_{(n)}$ es la matriz de covarianza en n, Q es la matriz de covarianza del error del estimador.
La estimación de la covarianza, puede ser fácilmente calculada si se comienza desde un sistema lineal, donde

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \tag{28}$$

entonces

$$\widetilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}) = (A\mathbf{x} - A\overline{\mathbf{x}}) = A(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) = A\widetilde{\mathbf{x}} \tag{29}$$

ahora tomado la varianza

$$E\left(\widetilde{\mathbf{y}}\widetilde{\mathbf{y}}^T\right) = E\left((A\widetilde{\mathbf{x}})\left(A\widetilde{\mathbf{x}}\right)^T\right) = E\left(A\widetilde{\mathbf{x}}\widetilde{\mathbf{x}}^T A^T\right) = AE\left(\widetilde{\mathbf{x}}\widetilde{\mathbf{x}}^T\right)A^T \tag{30}$$

Predicción

Varianza

$$P^{-}_{(n+1)} = AP_{(n)}A^{T} + Q \qquad (31)$$

Estado

$$\hat{\mathbf{x}}^{-}_{(n+1)} = A\hat{\mathbf{x}}_{(n)} + B\mathbf{u}_{(n+1)}$$

Actualización

Ganancia

$$\begin{aligned} K_{(n+1)} &= \Sigma_{1(n)} \left[\Sigma_{1(n)} + \Sigma_{2(n)}\right]^{-1} \\ &= P^{-}_{(n+1)} H^T \left[H P^{-}_{(n+1)} H^T + R\right]^{-1} = \frac{P^{-}_{(n+1)} H^T}{H P^{-}_{(n+1)} H^T + R} \end{aligned}$$

Estado

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{(n+1)} &= \mathbf{x}_{1(n+1)} + K(\mathbf{x}_{2(n+1)} - \mathbf{x}_{1(n+1)}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}^{-}_{(n+1)} + K_{(n+1)} \left[\mathbf{z}_{(n+1)} - H\hat{\mathbf{x}}^{-}_{(n+1)}\right] \end{aligned}$$

Covarianza

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{(n+1)} &= (I - K)\Sigma_{1(n)} \\ P_{(n+1)} &= (I - K_{(n+1)} H) P^{-}_{(n+1)} \end{aligned}$$

Ejemplo

Un vehículo que se desplaza por una linea recta, su velocidad estará dada por

$$v_{(n+1)} = v_{(n)} + ta_{(n)} \tag{32}$$

Donde $a_{(n)}$ es la aceleración durante t segundo en el período n, $v_{(n)}$ es la velocidad en el instante n y $v_{(n+1)}$ la velocidad calculada.
Agregando un ruido $v^{\sim}_{(n)}$ es:

$$v_{(n+1)} = v_{(n)} + ta_{(n)} + v^{\sim}_{(n)} \tag{33}$$

Posición del vehículo agregando el correspondiente ruido en la ecuación

$$p_{(n+1)} = p_{(n)} + tv_{(n)} + \frac{1}{2}t^2 a_{(n)} + p^{\sim}_{(n)} \tag{34}$$

El vector de estado es

$$\mathbf{x}_{(n)} = \begin{bmatrix} p_{(n)} \\ v_{(n)} \end{bmatrix} \tag{35}$$

La representación matricial será:

$$\mathbf{x}_{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{(n)} + \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \end{bmatrix} \mathbf{u}_{(n)} + \mathbf{w}_{(n)} \tag{36}$$

$$\mathbf{z}_{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{(n)} + \mathbf{v}_{(n)} \tag{37}$$

Suponemos:

- un error en la medición de distancia de $\sigma_y = 10m$.
- aceleración de $1m/s^2$ con un error $\sigma_a = 0,2m/s^2$.
- tiempo de $0,1s$

Las ecuaciones del movimiento será entonces

$$\mathbf{x}_{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{(n)} + \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{(n)} + \mathbf{w}_{(n)} \tag{38}$$

$$\mathbf{z}_{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{(n)} + \mathbf{v}_{(n)} \tag{39}$$

Tenemos error de posición y error de aceleración, se debe analiza como influyen estos errores en la estimación del vector de estados.
La posición es proporcional a $\frac{1}{2}t^2 = 0,005$ veces la aceleración, la cual tiene un error de $\sigma_a = 0{,}2m/s^2$.

$$\sigma_p = 0,005 \times 0,2 = 0,001 \tag{40}$$

La velocidad en proporcional a $t = 0,1$ veces la aceleración.

$$\sigma_v = 0,1 \times 0,2 = 0,02 \tag{41}$$

Finalmente se calcula la matriz de covarianza.

$$\begin{aligned} S_w &= E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) = E\left(\begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & v \end{bmatrix}\right) = E\begin{bmatrix} p^2 & pv \\ vp & v^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_p^2 & \sigma_p\sigma_v \\ \sigma_v\sigma_p & \sigma_v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 2\times 10^{-5} \\ 2\times 10^{-5} & 4\times 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Predicción

$$\hat{\mathbf{x}}^{-}_{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{(n)} + \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{(n)} \tag{42}$$

$$P^{-}_{(n+1)} = AP_{(n)}A^{T} + Q = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_{(n)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10^{-6} & 2 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} & 4 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Corrección

$$K = P^{-}_{(n+1)} H^T \left[H P^{-}_{(n+1)} H^T + R \right]^{-1} \tag{44}$$

$$= P^{-}_{(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P^{-}_{(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 10^2 \right]^{-1} \tag{45}$$

$$P_{(n+1)} = (I - KH) P^{-}_{(n+1)} = (I - K \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}) P^{-}_{(n+1)} \tag{46}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{(n+1)} = \hat{\mathbf{x}}^{-}_{(n+1)} + K \left(y_t - H \hat{\mathbf{x}}^{-}_{(n+1)} \right) = \hat{\mathbf{x}}^{-}_{(n+1)} + K \left(y_t - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^{-}_{(n+1)} \right) \tag{47}$$

FIN !!!

¿ Preguntas ?